

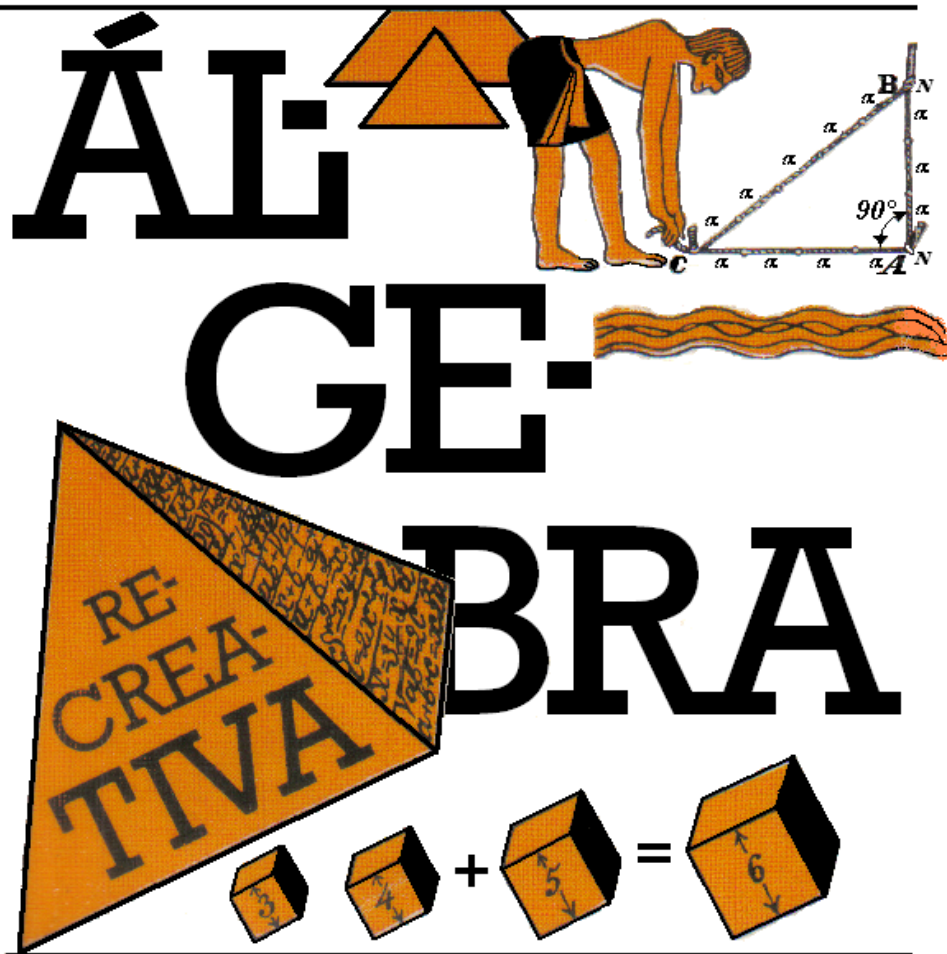
A CIÊNCIA AO
ALCANCE DE TODOS

Y.I. PERELMAN
ÁLGEBRA RECREATIVA

MIR

A CIÊNCIA AO ALCANCE DE TODOS

Y.I. PERELMAN



EDITORA MIR



A ciência
ao alcance de todos

Livraria Espaço do Livro (SEBO) MATEM

Carlos de Carvalho, 158 - Centro PERLMAN, Y.I.

Curitiba-PR

(041) 3323-8528/3027-2139

livros@espacodolivro.com.br

www.espacodolivro.com.br

ALGEBRA RECREATIVA

EDITORA MIR

187022

R\$ 8,00

*Este pertence a,
Hamilton Filho Mota
Alfairos.*

16/03/2007



Я. И. Перельман

Занимательная алгебра

Издательство «Наука»
Москва

Y. I. Perelman

Álgebra Recreativa

Traduzido do russo
por Hudson C. Lacerda,
Mestre em Ciências
Físico-Matemáticas



Editora Mir
Moscou

Impresso na U.R.S.S.

На португальском языке

ISBN 5-03-000318-2

© Издательство «Наука», 1975
© tradução para o português,
Editora Mir, 1989

Índice

Prefácio	9
Capítulo I. A quinta operação matemática	10
A quinta operação	10
Números astronômicos	12
Quanto pesa o ar?	14
Combustão sem calor nem luz	15
As variações do tempo	17
A fechadura de segredo	18
Ciclista supersticioso	20
Resultados da duplicação sucessiva	22
Milhões de vezes mais rápido	24
10 000 operações por segundo	29
Números de partidas de xadrez possíveis	32
O segredo da máquina de jogar xadrez	34
Com três "2"	39
Com três "3"	40
Com três "4"	40
Com três algarismos iguais	41
Com quatro "1"	42
Com quatro "2"	43
Capítulo II. A linguagem da álgebra	46
A arte de compor equações	46
A vida de Diofanto	48
O cavalo e o mulo	50
Os quatro irmãos	51
As aves das margens de um rio	53
O passeio	54
O grupo de ceifeiros	56
As vacas no prado	61
O problema de Newton	64
A troca dos ponteiros do relógio	66

Coincidências dos ponteiros	71
Arte de adivinhar números	72
Um pretensão absurdo	77
A equação pensa por nós	78
Curiosidades e surpresas	79
Na barbearia	83
O bonde e o pedestre	84
O barco e a jangada	86
Duas latas de café	87
A festa	89
Exploração marinha	90
No velódromo	92
Corrida de motos	93
Velocidade média	96
Máquinas para calcular rapidamente	98

Capítulo III. Em ajuda da aritmética 112

Multiplicação abreviada	112
Os algarismos 1, 5 e 6	115
Os números 25 e 76	117
"Números" infinitos	117
A compensação	121
Divisibilidade por 11	123
A placa do automóvel	126
Divisibilidade por 19	128
Teorema de Sofia Germain	130
Números compostos	131
Sobre os números primos	133
O maior número primo conhecido	134
Um cálculo muito trabalhoso	135
Ocasões em que é preferível não recorrer à álgebra	139

Capítulo IV. As equações de Diofanto 141

Compra de um pulôver	141
Revisão da contabilidade	146
Compra de selos de correio	150
Compra de fruta	152
Adivinhar o dia do nascimento	153
A venda de frangos	156
Dois números e quatro operações	160
Como será o retângulo?	161

Dois números de dois algarismos	162
Os números pitagóricos	164
Equação indeterminada do terceiro grau	169
Cem mil marcos pela demonstração de um teorema	175
 Capítulo V. A sexta operação matemática	 178
A sexta operação	178
Qual raiz é maior?	180
Resolver mentalmente	182
Comédias algébricas	183
 Capítulo VI. Equações do segundo grau	 187
O aperto de mãos	187
O enxame de abelhas	188
O bando de macacos	190
Providência das equações	191
O problema de Euler	193
Os alto-falantes	196
A álgebra do vôo à Lua	198
"Exercício complicado"	202
Quais são os números	205
 Capítulo VII. O maior e o menor valor	 207
Dois trens	207
Onde construir o apeadeiro	211
Como traçar a estrada para o porto?	214
Quando é que o produto alcança o seu valor máximo?	217
Qual será a menor soma?	221
O tronco de volume máximo	222
Duas parcelas de terra	223
O papagaio	224
A construção de uma casa	226
O terreno	228
A calha de seção máxima	230
O funil de capacidade máxima	233
A iluminação de maior intensidade	235

Capítulo VIII. Progressões	239
A mais antiga progressão	239
Algebra em papel quadriculado	241
A rega da horta	243
A comida para as galinhas	245
A equipe de cavadores	246
As maçãs	248
A compra do cavalo	249
A recompensa do soldado	250
Capítulo IX. A sétima operação matemática	252
A sétima operação	252
Os rivais dos logaritmos	254
A evolução das tábuas de logaritmos	256
Curiosidades logarítmicas	257
Os logaritmos em cena	259
Logaritmos no curral	262
Logaritmos da música	264
As estrelas, o ruído e os logaritmos	266
Os logaritmos e a luz elétrica	269
Legados a longo prazo	271
Juros contínuos	274
O número "e"	275
Comédia logarítmica	278
Expressar qualquer número só com três 2	279

Prefácio

O presente livro não é um manual elementar de álgebra para principiantes. *Álgebra Recreativa*, tal como outras obras minhas da mesma série, é, antes de tudo, um livro de estudo livre e não um texto. O leitor a quem destinamos o presente volume deve possuir certos conhecimentos de álgebra, embora os tenha assimilado superficialmente ou os tenha esquecido em parte. *Álgebra Recreativa* tem por finalidade lembrar e reforçar estes conhecimentos dispersos e inconsistentes, mas, em primeiro lugar, visa despertar no leitor interesse por exercícios de álgebra e desejo de cobrir com ajuda de manuais eventuais lacunas.

Para tornar mais atraente o tema e elevar o interesse por ele, recorro a métodos diversos: problemas baseados em temas originais que despertam curiosidade, excursões divertidas pela história da matemática, aplicações inesperadas da álgebra a questões da vida prática, etc.

Capítulo I

A quinta operação matemática



A quinta operação

Frequentemente se diz que a álgebra é a “aritmética das sete operações”, querendo com isto sublinhar que às quatro operações matemáticas, conhecidas de todos, a álgebra acrescenta mais três: a potenciação e as suas inversas.

Começemos as nossas conversas algébricas pela “quinta operação”: a potenciação.

Esta operação responderá a uma exigência da vida prática? Indubitavelmente. Na vida tropeçamos com ela com muita freqüência. Recordemos os inúmeros casos em que, para calcular superfícies e volumes, é necessário elevar os números à segunda ou à terceira potência. Outro exemplo: a força da gravitação universal, a ação recíproca eletrostática e magnética, a luz e o som são inversamente proporcionais ao quadrado das distâncias. A continuidade da translação dos planetas em volta do Sol (ou dos satélites em volta dos planetas) expressa-se também na forma de uma potência dependente da distância que os separa do seu centro de translação: a razão entre os quadrados dos tempos é igual à razão dos cubos das distâncias.

É um erro pensar que na prática nos aparecem apenas segundas e terceiras potências e que não existem expoentes de potências superiores senão nos livros de álgebra. Quando um engenheiro procura o grau de solidez de um corpo, é obrigado a operar a todo o momento com quartas potências. Em outros cálculos (para determinar o diâmetro de um tubo condutor de vapor, por exemplo) chega, inclusive, a operar com a sexta potência. Também os técnicos hidráulicos usam as potências de expoente seis quando têm que averiguar a força com que as pedras são arrastadas pela água: se a corrente de um rio é quatro vezes mais rápida que a de outro, o primeiro é capaz de arrastar no seu leito pedras 4^6 , isto é, 4096 vezes mais pesadas que o segundo rio *!

Ao estudar a relação existente entre a luminosidade de um corpo incandescente — o filamento de uma lâmpada, por exemplo — e a sua temperatura, opera-se com potências ainda maiores. Quando a incandescência é branca, a sua luminosidade geral aumenta na razão da décima segunda potência de sua temperatura, quando é vermelha aumenta na razão da trigésima potência da temperatura (sendo esta absoluta, isto é, a partir de -273°C). Isto significa que, se aquecermos um corpo de 2000 a 4000 graus absolutos, por exemplo, ou seja, se elevarmos para o dobro a sua temperatura, a luminosidade de tal corpo

* Esta questão é minuciosamente examinada no meu livro *Mecânica Recreativa*.

aumentará em 2^{12} , isto é, em mais de 4000 vezes. Mais adiante nos ocuparemos da importância que tem para a fabricação de lâmpadas elétricas estas proporções tão singulares.

Números astronômicos

É provável que ninguém faça tanto uso da “quinta operação matemática” como os astrônomos. Os exploradores do firmamento manejam, sem cessar, grandezas formadas por um ou dois algarismos significativos seguidos de uma longa série de zeros. Seria muito incômodo expressar pelos processos ordinários tais grandezas, chamadas com toda a razão “astronômicas” e, sobretudo, operar com elas. Os quilômetros que nos separam da nebulosa de Andrômeda representam-se pelo seguinte número:

95 000 000 000 000 000 000.

Além disso, ao efetuar cálculos astronômicos, muitas vezes tem-se que trabalhar não com quilômetros ou outras unidades ainda maiores, mas sim com centímetros. Neste caso, a distância referida leva mais cinco zeros:

9 500 000 000 000 000 000 000 000.

A massa das estrelas expressa-se em números ainda mais consideráveis, sobretudo se temos que registrar em gramas, como exigem muitos cálculos. A massa do Sol, em gramas, é

igual a:

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Podemos imaginar o difícil que seria operar com números tão grandes e do fácil que seria cometer erros em tais casos. Além disso, as quantidades referidas estão muito longe de ser as maiores em astronomia.

A quinta operação matemática facilita os cálculos. A unidade seguida de vários zeros expressa-se pelo número 10 elevado a uma determinada potência:

$$100 = 10^2; \quad 1000 = 10^3; \quad 10\,000 = 10^4; \quad \text{etc}$$

Os enormes números citados anteriormente podem ser representados do seguinte modo:

$$\begin{array}{ll} \text{o primeiro} & \dots\dots\dots 95 \cdot 10^{23}, \\ \text{o segundo} & \dots\dots\dots 1\,983 \cdot 10^{30}. \end{array}$$

Expressam-se assim não só para economizar espaço, mas também para facilitar os cálculos. Se tivéssemos, por exemplo, que multiplicar ambos os números entre si, bastaria determinar o produto $95 \cdot 1983$ e a seguir o fator $10^{23+30} = 10^{53}$ do seguinte modo:

$$95 \cdot 10^{23} \cdot 1983 \cdot 10^{30} = 188\,385 \cdot 10^{53}.$$

É evidente que isto é muito mais cômodo que escrever um número seguido de 23 zeros, outro de 30 zeros e, por último, um terceiro seguido de 53 zeros. É não só mais simples, mas também mais seguro, visto que, ao escrever uma tal série de zeros, pode-se omitir algum, obtendo-se um resultado errado.

Quanto pesa o ar?

Para comprovar até que ponto se facilitam os cálculos, representando os números sob a forma de potências, consideremos o seguinte exemplo: determinemos quantas vezes a massa do globo terrestre é maior que a do ar que o rodeia.

O ar exerce sobre a superfície terrestre uma pressão de um quilograma por centímetro quadrado aproximadamente.

Isto quer dizer que o peso da coluna de ar que se apoia em 1 cm^2 é igual a 1 kg . A capa atmosférica da Terra é formada, por assim dizer, pelo conjunto dessas colunas de ar que são tantas quantos os centímetros quadrados da superfície do nosso planeta e quantos os quilogramas que pesa toda a atmosfera. Consultando as tabelas correspondentes, verificaremos que a superfície terrestre mede 510 milhões de quilômetros quadrados, isto é, $51 \cdot 10^7 \text{ km}^2$.

Vejamos quantos centímetros quadrados há num quilômetro quadrado. O quilômetro linear tem 1000 metros e cada um destes tem 100 centímetros, ou seja, um total de 10^5 cm e, portanto, o quilômetro quadrado é constituído por $(10^5)^2 = 10^{10} \text{ cm}^2$. Daí decorre que a superfície do globo terrestre é igual a

$$51 \cdot 10^7 \cdot 10^{10} = 51 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2.$$

Este número representa também a quantidade de quilogramas que pesa atmosfera da Terra. Reduzindo os quilômetros a toneladas

resultará:

$$\begin{aligned} 51 \cdot 10^{17} : 1000 &= 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = \\ &= 51 \cdot 10^{17-3} = 51 \cdot 10^{14}, \end{aligned}$$

enquanto que a massa do globo terrestre é de $6 \cdot 10^{21}$ toneladas.

Para sabermos quantas vezes é o nosso planeta mais pesado do que a camada de ar que o rodeia, efetuemos a seguinte divisão:

$$6 \cdot 10^{21} : 51 \cdot 10^{14} \approx 10^6,$$

de onde se conclui que a massa atmosférica é, aproximadamente, a milionésima da do globo terrestre *.

Combustão sem calor nem luz

Se perguntarmos a um químico por que motivo a lenha ou o carvão ardem apenas à temperatura elevada, ele responderá que a combinação do carbono e do oxigênio se produz a qualquer temperatura, mas que quando esta é baixa, tal processo decorre com excessiva lentidão (isto é, na reação toma parte um número insignificante de moléculas), e por isso escapa à nossa observação. A lei que rege a velocidade das reações químicas diz-nos que, quando a temperatura desce em 10°C , a velocidade da reação (o número de moléculas que tomam parte nela) *reduz-se a metade*.

Apliquemos tal lei à reação que se produz se oxigenarmos a madeira, isto é, ao processo

* O sinal $\approx$ significa aproximadamente igual.

de combustão da madeira. Suponhamos que um grama de madeira submetido a uma temperatura de 600°C se consome num segundo. Quanto demorará a consumir-se 1 g de lenha à temperatura de 20°C ? Sabe-se que com uma temperatura inferior a $580 = 58 \cdot 10$ graus, a sua reação será 2^{58} vezes mais lenta ou, o que é o mesmo, um grama de lenha se consumirá em 2^{58} segundos.

A quantos anos equivale este lapso de tempo? Podemos fazer o cálculo sem realizar 57 multiplicações consecutivas por 2 e sem recorrer à tábua de logaritmos. Sabe-se que

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3,$$

de onde se deduz que

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^{60} = \frac{1}{4} \cdot (2^{10})^6 \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{18},$$

isto é, aproximadamente a quarta parte de um quintilhão de segundos. O ano tem cerca de 30 milhões de segundos ou, o que é o mesmo, $3 \cdot 10^7$ segundos. Por isso

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 10^{18} \right) : (3 \cdot 10^7) = \frac{1}{12} \cdot 10^{11} \approx 10^{10}.$$

Dez bilhões de anos! É este, aproximadamente, o tempo que demoraria a consumir-se um grama de madeira sem chama nem calor.

Por conseguinte, a madeira e o carvão ardem à temperatura ordinária sem ser necessário acendê-los. A invenção de instrumentos para obter fogo permitiu acelerar bilhões de vezes este processo que, como vimos, é muito lento.

As variações do tempo

Problema

Fixemos a nossa atenção num só elemento: se o céu está limpo ou nublado, isto é, distinguimos os dias pelo fato de o céu ter nuvens ou não. Que pensa o leitor? Nestas condições, haverá muitas semanas com combinações de dias nublados ou limpos?

Pode parecer-nos que estas serão poucas e que passados dois meses se esgotarão todas as combinações de dias limpos e nublados, repetindo-se então forçosamente algumas das combinações já observadas.

Mas tentemos calcular exatamente o número de combinações possíveis que podem dar-se nestas condições. Este é um dos problemas que nos conduzem inesperadamente à quinta operação matemática.

E assim, de quantas formas diferentes podem combinar-se os dias com céu limpo ou nublado numa mesma semana?

Solução

O primeiro dia da semana pode ter céu limpo ou nublado, o que quer dizer que por enquanto se têm duas “combinações”.

No decurso de dois dias são possíveis as seguintes combinações de céu limpo e nublado:

limpo e limpo
limpo e nublado
nublado e limpo
nublado e nublado.

Em dois dias temos já 2^2 combinações diferentes. Em três dias, cada uma das quatro combinações dos dois primeiros dias forma duas combinações com o terceiro dia. Deste modo obtemos um total de variações igual a $2^2 \cdot 2 = 2^3$.

Em quatro dias o número de combinações será de

$$2^3 \cdot 2 = 2^4.$$

Com o quinto dia se obterão 2^5 combinações, com o sexto, 2^6 e, por último, numa semana haverá $2^7 = 128$ combinações.

De tudo isto se deduz que há 128 semanas com diferentes variações de dias com céu limpo ou nublado. Ao fim de $128 \cdot 7 = 896$ dias se repetirá inevitavelmente uma das combinações anteriores, ainda que tal repetição possa surgir antes, mas 896 dias constituem o período a partir do qual esta repetição é absolutamente inevitável. Assim podem decorrer mais de dois anos (dois anos e 166 dias) sem que o estado atmosférico de uma semana se pareça com o de outras.

A fechadura de segredo

Problema

Em certa instituição soviética foi encontrado um cofre-forte de tempos anteriores à Revolução. Encontrou-se também a chave, mas para poder abrir o cofre era necessário

conhecer o segredo da fechadura: esta se compunha de cinco discos em cujas bordas havia um alfabeto de 36 letras. As letras das bordas dos discos deviam combinar-se de modo a formarem uma determinada palavra que se desconhecia. Para evitar arrombar o cofre, decidiu-se experimentar com tais letras todas as combinações possíveis. Em cada uma destas combinações se gastariam três segundos. Seria possível abrir a fechadura em dez jornadas?

Solução

Calculemos o número total de combinações possíveis.

Cada uma das 36 letras do primeiro disco pode combinar-se com cada uma das 36 letras do segundo. Portanto, o número de combinações possíveis com duas letras de dois discos é:

$$36 \cdot 36 = 36^2.$$

A cada uma destas combinações podemos acrescentar qualquer das 36 letras do terceiro disco. Deste modo, o total de variações com três letras dos três discos será:

$$36^2 \cdot 36 = 36^3.$$

Do mesmo modo determinaremos o número de combinações possíveis com quatro letras de quatro discos, que é 36^4 e com cinco letras dos cinco discos temos 36^5 , isto é, 60 466 176.

Para experimentar estes sessenta milhões e tanto de combinações, gastando três segundos com cada uma, são necessários:

$3 \cdot 60 \ 466 \ 176 = 181 \ 398 \ 528$ segundos,

isto é, mais de 50 000 horas, o que equivale a quase 6300 dias de trabalho (de oito horas), ou seja, mais de 20 anos!

Isto quer dizer que existem dez casos favoráveis entre 6300 ou um em 630, de que o cofre seja aberto em dez dias de trabalho. Portanto, a probabilidade é muito reduzida.

Ciclista supersticioso

Problema

Houve uma época em que as bicicletas precisavam ter placas de licenciamento, como os automóveis e as motos.

Certa pessoa muito supersticiosa comprou uma bicicleta para aprender a andar nela. Quando soube que certo defeito próprio de bicicletas se chamava “oito”, julgou-se condenado a algum contratempo se no número da sua placa figurasse algum oito. No entanto, quando foi recebê-la, tranquilizou-se com a seguinte reflexão: qualquer que seja o número da placa, é constituído com os algarismos de 0 a 9. Destes, apenas o 8 “dá azar”, e por isso, em cada dez casos há um em que a placa é “infeliz”.

Estará certa esta conclusão?

Solução

Suponhamos que o número das placas é composto de seis algarismos. Portanto, haverá 999 999 placas diferentes, desde o 000 001, 000 002, etc., até o 999 999. Calculemos agora quantos números “afortunados” poderemos encontrar. O lugar das unidades do número pode ser ocupado por qualquer dos nove algarismos “felizes”: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9. No lugar das dezenas também se pode encontrar um destes nove algarismos. Daqui concluímos que os dois primeiros algarismos dão $9 \cdot 9 = 9^2$ combinações “favoráveis”. A cada uma destas combinações pode-se juntar um terceiro algarismo dos nove “afortunados”. Logo, as combinações “felizes” de três algarismos são $9^2 \cdot 9 = 9^3$.

Igualmente se deduz que o número de combinações “felizes” compostas de seis algarismos é igual a 9^6 . Contudo, temos de ter em conta que este número compreende a combinação 000 000, que não serve para placa. Por conseguinte, o número de placas “afortunadas” é de $9^6 - 1 = 531\,440$, o que constitui um pouco mais de 53% do total de números possíveis e não 90%, como supunha o ciclista em questão.

O leitor verificará que na série de números com sete algarismos, há mais “infelizes” do que “afortunados”.

Resultados da duplicação sucessiva

Na famosa lenda em que se fala da recompensa concedida ao inventor do xadrez há um exemplo demonstrativo do rápido crescimento que se obtém ao duplicar sucessivamente um número por menor que seja *. Sem me deter neste exemplo clássico, citarei outros, menos conhecidos.

Problema

Cada 27 horas, em média, uma paramécia divide-se em duas. Se todas as paramécias surgidas deste modo permanecessem vivas, quanto tempo seria necessário para que a descendência de uma paramécia tivesse o volume do Sol?

Os dados necessários para este cálculo são: à 40.^a geração, se todas se conservarem vivas, as paramécias ocupam o volume de um metro cúbico. O volume do Sol é de 10^{27} m^3 .

Solução

O problema consiste em determinar quantas vezes se deve duplicar 1 m^3 para chegar a 10^{27} m^3 .

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90},$$

visto que $2^{10} \approx 1000$.

* Veja meu livro *Matemática Recreativa*.

Deste modo, a quadragésima geração deve sofrer 90 novas divisões sucessivas para alcançar o volume do Sol. O número total de gerações, incluindo a primeira, é de $40 + 90 = 130$. Não oferece dificuldade determinar que isto acontece no 147.^o dia.

O microbiólogo russo Metálnikov observou 8061 divisões sucessivas da paramécia. Que o leitor calcule o volume colossal que teria a última geração se não morresse nenhuma destas paramécias. A questão examinada neste problema pode ser apresentada, por assim dizer, no sentido oposto.

Imaginemos que o Sol se divida em duas metades, que cada uma dessas metades também se divida em duas, etc. Quantas operações destas seriam necessárias para que resultasse uma partícula do tamanho de uma paramécia?

Ainda que o leitor conheça já a resposta — 130 — nem por isso deixa de assombrar o seu pequeno número.

A mim me apresentaram o problema do seguinte modo:

Uma folha de papel foi dividida em duas e uma das metades obtidas foi, por sua vez, dividida ao meio, etc. Quantas divisões tiveram de ser feitas para se chegar a dimensão do átomo?

Suponhamos que a folha de papel pesa um grama e que tomamos $\frac{1}{10^{24}}$ do grama como peso do átomo. Como sabemos que 10^{24} pode ser substituído aproximadamente por 2^{80} , torna-se evidente que apenas são necessários

uns 80 desdobramentos e não milhões como se responde frequentemente quando se apresenta pela primeira vez este problema.

Milhões de vezes mais rápido

O aparelho elétrico chamado *flip-flop* contém duas válvulas eletrônicas *. A corrente pode entrar no flip-flop apenas através de uma válvula: ou pela “esquerda”, ou pela “direita”. O aparelho tem dois contatos aos quais se pode enviar do exterior um sinal elétrico instantâneo (impulso) e dois contatos através dos quais o flip-flop transmite o sinal de resposta. No instante em que chega o impulso elétrico exterior, o flip-flop muda o contato: a válvula pela qual passou a corrente se desliga e a corrente começa a passar pela outra válvula. O flip-flop envia o impulso de resposta, desligando a válvula da direita e ligando a da esquerda.

Vejamos como funcionará o flip-flop se lhe enviarmos vários impulsos consecutivos. Fixemos a posição do flip-flop, baseando-nos na válvula da *direita*: se a corrente *não passa* por ela, convençionemos que o flip-flop se encontra na “posição 0”; e se a corrente passa por ela (a da direita), o aparelho está na “posição 1”.

Suponhamos que o flip-flop se encontra na posição 0, isto é, que a corrente passa pela

* O resultado será o mesmo se em vez de válvulas electrónicas forem usados transistores ou os chamados circuitos sólidos (de películas).

válvula da esquerda (fig. 1). Depois do primeiro impulso a corrente entra pela válvula da direita, isto é, o flip-flop passa para a posição 1. Entretanto, o aparelho não emite

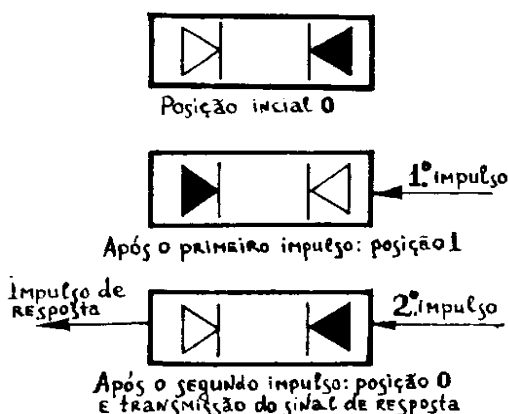


Fig. 1

sinal de resposta, visto que este só se produz quando se desliga a válvula da direita (e não a da esquerda).

Depois do segundo impulso, a corrente entra pela válvula da esquerda, isto é, o flip-flop toma novamente a posição 0. Mas nesse instante o flip-flop lança o sinal de resposta (impulso).

A seguir (depois de dois impulsos), o aparelho retorna à sua posição inicial. Por isso, depois do terceiro impulso, o flip-flop volta à posição 1, como o fez depois do primeiro. Depois do quarto (como depois do segundo) à posição 0, enviando ao mesmo tempo o sinal de resposta e assim sucessivamente. Em

cada dois impulsos repete-se a posição do flip-flop.

Suponhamos agora que temos vários circuitos flip-flop, e que os impulsos exteriores são enviados apenas ao primeiro deles, os impulsos de resposta do primeiro flip-flop transmitem-se ao segundo, os do segundo ao

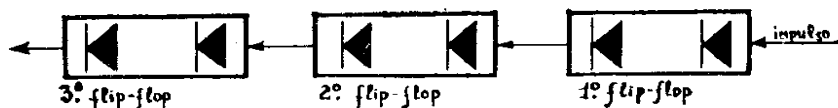


Fig. 2

terceiro, etc. (a figura 2 mostra os aparelhos ligados em série da direita para a esquerda). Vejamos como funcionará essa série de flips-flops.

Suponhamos que no momento inicial todos os flips-flops se encontram na posição 0. Por exemplo, para a série de cinco flips-flops teremos a combinação 00000. Depois do primeiro impulso, o primeiro flip-flop (o da extrema direita) toma a posição 1, mas como neste caso não se dá o impulso de resposta, todos os demais aparelhos permanecem na posição 0, isto é, a combinação se caracterizará pela posição 00001. Depois do segundo impulso, o primeiro flip-flop se desliga (volta à posição 0), mas este emite sinal de resposta, em virtude do qual se liga o segundo flip-flop sem produzir alterações nos restantes aparelhos, isto é, obtemos a posição 00010. Depois do terceiro impulso liga-se o primeiro flip-flop e os demais não mudam de posição. Teremos a com-

binação 00011. Com o quarto impulso desliga-se o primeiro flip-flop. Este dá sinal de resposta que serve de impulso desligador do segundo flip-flop que também dá impulso de resposta. Finalmente, com este último impulso liga-se o terceiro flip-flop. O resultado de tudo isto será a combinação 00100.

Se continuarmos estes raciocínios, resultará:

1.º impulso, combinação	00001
2.º » »	00010
3.º » »	00011
4.º » »	00100
5.º » »	00101
6.º » »	00110
7.º » »	00111
8.º » »	01000
.	

Vemos que esta série de flips-flops “conta” o número de sinais recebidos do exterior e os “anota” à sua maneira. Não é difícil verificar que a “anotação” do número de impulsos não se efetua de acordo com o sistema habitual de base dez, mas sim no sistema de numeração *de base dois*.

Neste sistema, os números formam-se com uns e zeros. A unidade que ocupa o segundo lugar não é dez vezes maior do que a que está em primeiro lugar, mas apenas duas vezes. A unidade que no sistema de base dois ocupa o último lugar (o da direita) é uma unidade ordinária, A unidade de ordem seguinte

(a que ocupa o segundo lugar, contado a partir da direita) representa um dois. A unidade seguinte, um quatro; a outra, um oito, etc.

Por exemplo, o número $19 = 16 + 2 + 1$ registra-se no sistema de base dois sob a forma 10011.

Por conseguinte, a série de flips-flops “conta” o número de sinais recebidos e os “anota” no sistema de base dois. Observe-se que a mudança de posição do flip-flop, isto é, o registro de um dos impulsos chegados, leva... *milionésimos de segundo*. Os contadores de flip-flop modernos podem “contar” dezenas de milhões de impulsos por segundo, o que abrevia esta operação milhões de vezes em relação ao tempo gasto com tal cálculo por uma pessoa que não disponha do aparelho: a vista humana apenas pode distinguir com clareza sinais que se sucedam com um intervalo não superior a 0,1 segundo.

Se formarmos uma série de vinte flips-flops, isto é, se procurarmos registrar uma quantidade de sinais dada por um número que não tenha mais do que vinte algarismos no sistema de base dois, podemos “contar” até $2^{20} - 1$, ou seja, mais de um milhão. E se formarmos uma série de 64 flips-flops, podemos registrar o famoso “número do xadrez”.

A possibilidade de contar milhões de sinais num segundo representa grande importância para os trabalhos experimentais relacionados com a física nuclear. Pode registrar-se, por exemplo, o número de partículas de um ou outro tipo emitidas durante a desintegração do átomo.

10 000 operações por segundo

Merece ainda destaque o fato de os *flips-flops* permitirem também realizar *operações* com números. Vejamos, por exemplo, como se efetua a adição de dois números.

Suponhamos que três séries de *flips-flops* se encontram ligadas como se indica na

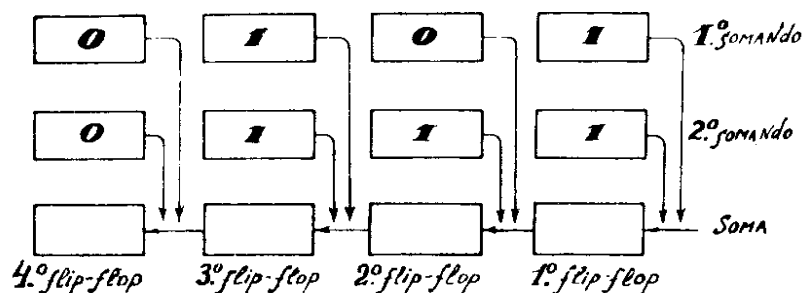


Fig. 3

figura 3. A série superior serve para registrar a primeira parcela, a segunda série para a segunda parcela e a inferior para a soma. Quando se liga o aparelho aos *flips-flops* da série inferior, chegam impulsos dos *flips-flops* das séries superior e média que se encontrem na posição 1.

Admitamos que, como se assinala na figura 3, as duas primeiras séries apresentam as parcelas 101 e 111 (no sistema de numeração de base dois). Neste caso, quando ligarmos o aparelho, chegarão ao primeiro *flip-flop* da série inferior (o extremo direito) dois impulsos: os do primeiro *flip-flop* de cada

uma das parcelas. Como sabemos, ao receber dois impulsos, o primeiro flip-flop fica na posição 0, mas responde com um impulso que envia ao segundo flip-flop. A este chega, além disso, um sinal da segunda parcela. Assim, ao segundo flip-flop da série inferior chegam dois impulsos e por isso fica na posição 0 e envia um impulso de resposta ao terceiro flip-flop. Além disso, ao terceiro flip-flop chegam mais dois impulsos, um de cada uma das parcelas. Como resultado, o terceiro flip-flop passa para a posição 1 e emite um impulso de resposta. Este impulso de resposta faz o quarto flip-flop passar para a posição 1 (ao quarto flip-flop não chegam mais sinais). Eis como o aparelho representado na figura 3 realizou, no sistema de numeração de base dois, uma soma “em coluna” de dois números:

$$\begin{array}{r} + 101 \\ + 111 \\ \hline 1100 \end{array}$$

ou, efetuando a adição no sistema decimal, $5 + 7 = 12$. Ao dar-se o impulso de resposta, na série inferior de flips-flops tudo se passa como se o aparelho “levasse uma unidade” da coluna anterior e a acrescentasse à seguinte, isto é, faz o mesmo que nós quando somamos “em coluna”.

Se em cada série houvesse, em vez de quatro, vinte flips-flops, por exemplo, poderíamos realizar adições de números inferiores a um milhão e, se aumentássemos o número de flips-flops, seria possível adicionar números maiores.

Devemos observar que, na prática, o esquema deste mecanismo é um tanto mais complicado do que o que aparece na figura 3. Por exemplo, a máquina deve ter um aparelho retardador dos impulsos. De fato, na máquina representada no esquema, os impulsos das parcelas chegam *simultaneamente* (no instante em que se liga a máquina) ao primeiro flip-flop da série inferior. Assim, ambos os sinais se fundirão num só e por isso o flip-flop reagirá a eles como se fossem um único impulso. Para evitar isto, é preciso que os sinais das parcelas não cheguem todos simultaneamente, mas uns mais tarde que outros. A presença deste “retardador” faz a adição demorar mais que o tempo necessário para o registro de um impulso no contador de flips-flops.

Se alterarmos o esquema da máquina, esta poderá efetuar subtrações em vez de adições. Pode-se usar também para a multiplicação (que consiste na adição consecutiva de parcelas, o que exige mais tempo), a divisão e outras operações.

Os aparelhos a que nos temos referido se empregam nas máquinas modernas de calcular. Estas podem realizar num segundo dezenas e mesmo centenas de milhares de operações numéricas! Esta vertiginosa rapidez operatória pode parecer-nos supérflua. Que diferença haverá, por exemplo, em que a máquina eleve um número de 15 algarismos ao quadrado num décimo de milésimo de segundo ou, suponhamos, num quarto de segundo? Num caso e no outro, nos parecerão soluções instantâneas do problema...

Contudo, não devemos tirar conclusões apressadas. Consideremos o seguinte exemplo: um bom enxadrista, antes de mover uma peça, analisa dezenas e até centenas de variantes possíveis. Se supusermos que a análise de uma variante ocupa alguns segundos, para se examinarem centenas delas se gastarão minutos ou até dezenas de minutos. Não raro, em partidas complicadas, os enxadristas jogam em “zeitnot”, isto é, se vêem obrigados a realizar as últimas jogadas apressadamente porque, ao meditar em nos lances anteriores, esgotaram quase todo o tempo destinado à partida. E se encarregarmos a máquina do exame das variantes da jogada na partida de xadrez? A máquina, como sabemos, nunca pode cair em “zeitnot”, já que realiza milhares de operações por segundo e pode analisar todas as variantes “instantaneamente”...

O leitor poderá objetar que uma coisa é efetuar operações por mais complicadas que sejam, e outra, jogar xadrez: a máquina não pode fazer isso! Ao analisar as variantes o enxadrista não opera, *pensa*! Mas por ora não divaguemos. Voltaremos a este assunto mais adiante.

Número de partidas de xadrez possíveis

Façamos o cálculo mais ou menos exato do número de partidas de xadrez possíveis. Como carece de sentido a determinação precisa, oferecemos ao leitor uma tentativa de

determinar aproximadamente o número de partidas de xadrez possíveis. No livro "A matemática dos jogos e distrações matemáticas", de M. Kraitchik, matemático belga, encontramos o seguinte cálculo:

"Ao mover a primeira peça, as brancas podem escolher entre 20 jogadas (16 jogadas com os peões, cada um dos quais pode avançar uma ou duas casas, e duas jogadas com cada cavalo). À primeira jogada das brancas, as pretas podem responder com qualquer destes 20 lances. Combinando cada movimento das brancas com cada uma das pretas, teremos $20 \cdot 20 = 400$ partidas depois da primeira jogada de ambas as partes.

Depois do primeiro movimento, o número de jogadas possíveis é ainda maior. Se as brancas fizeram o primeiro lance, por exemplo, $e2 - e4$, para a segunda jogada eles têm 29 variantes para escolher. E posteriormente o número de jogadas possíveis será ainda maior. Só a rainha, encontrando-se, por exemplo, na casa $d5$, pode fazer 27 movimentos (supondo que todas as casas para onde ela poderá ir estão livres). No entanto, para simplificar o cálculo, consideraremos os seguintes valores médios:

20 variantes para cada uma das partes nas primeiras cinco jogadas;

30 variantes para cada parte nas restantes jogadas.

Admitamos, além disso, que o total de jogadas numa partida normal é, em média, de 40. Partindo destes pressupostos, o número

de partidas possíveis será:

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35}.$$

Para determinar o valor numérico aproximado desta expressão, recorreremos às seguintes transformações e simplificações: $(20 \times 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} = 20^{10} \cdot 30^{70} = 2^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{80}$.

Substituamos 2^{10} por 1000, que é um valor aproximado, isto é, 10^3 .

Apresentemos a potência 3^{70} na forma seguinte:

$$\begin{aligned} 3^{70} &= 3^{68} \cdot 3^2 \approx 10 \cdot (3^4)^{17} \approx 10 \cdot 80^{17} = \\ &= 10 \cdot 8^{17} \cdot 10^{17} = 2^{51} \cdot 10^{18} = \\ &= 2 \cdot (2^{10}) \cdot 10^{18} \approx 2 \cdot 10^{15} \cdot 10^{18} = 2 \cdot 10^{33}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} \approx 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{80} = 2 \cdot 10^{116}.$$

Este número ultrapassa de longe o conhecido número de grãos de trigo pedido como prêmio pela invenção do xadrez ($2^{64} - 1 \approx 18 \cdot 10^{18}$). Se toda a população do globo terrestre jogasse xadrez dia e noite, movendo uma peça cada segundo, para esgotar todas as partidas de xadrez possíveis se levariam pelo menos 10^{100} séculos!

O segredo da máquina de jogar xadrez

O leitor ficará, possivelmente, assombrado se lhe dissermos que houve uma época em que existiam máquinas automáticas de jogar xa-

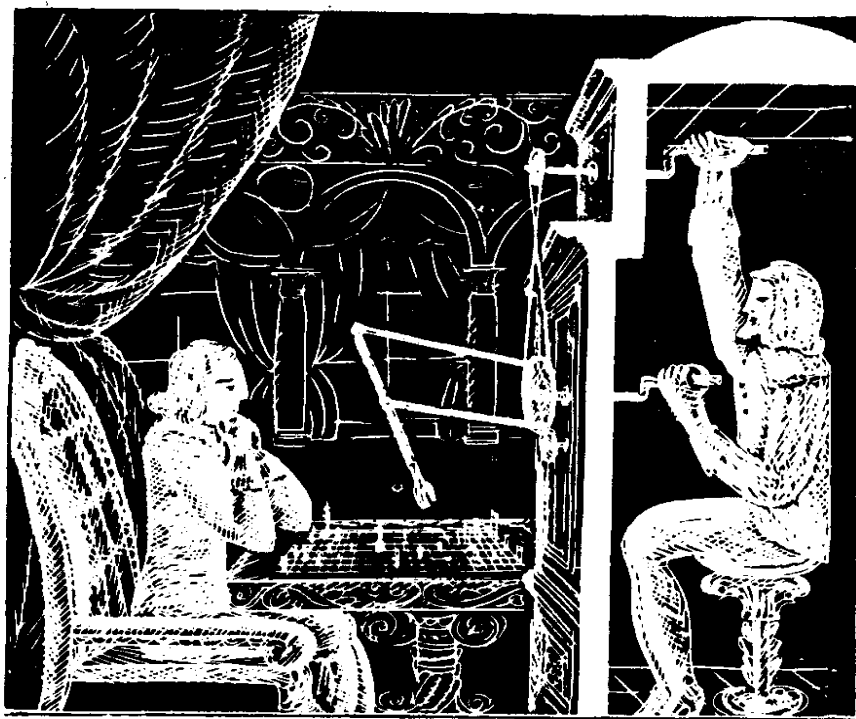


Fig. 4

drez. De fato, como conceber semelhantes aparelhos se o número de combinações com as peças no tabuleiro de xadrez é praticamente infinito?

A explicação é muito simples. Não era uma máquina o que existia, mas sim a fé nela. Um aparelho que gozou de grande popularidade foi o do mecânico húngaro Wolfgang von Kempelen (1734—1804), que o apresentou nas cortes austríaca e russa e depois exibiu-o publicamente em Paris e Londres. Napoleão I jogou com esta máquina, acreditando que de

fato a enfrentava. Em meados do século passado, o célebre aparelho foi parar na América, tendo sido destruído num incêndio em Filadélfia.

A fama das outras máquinas não foi tão grande. Contudo, nem posteriormente se perdeu a fé na existência de tais aparelhos.

Na realidade, nenhuma das máquinas de jogar xadrez atuava automaticamente. Dentro delas ocultava-se um bom enxadrista, que movia as peças. Este aparelho pseudo-automático era constituído por uma volumosa caixa em cujo interior havia um mecanismo complexo. A caixa tinha um tabuleiro de xadrez com as peças, as quais podiam ser movidas pela mão de um boneco grande. Antes do jogo começar permitia-se ao público que se certificasse de que na caixa nada mais havia do que as peças do mecanismo. No entanto, nessa caixa ficava um lugar suficiente para se esconder um homem de baixa estatura, (este papel foi desempenhado na época pelos célebres enxadristas Johann Allgaier e William Lewis). É provável que, enquanto iam mostrando sucessivamente ao público diferentes compartimentos da caixa, a pessoa escondida passava de um lugar para outro sem ser vista. O mecanismo em si não tomava parte no funcionamento do aparelho, servindo apenas para esconder a presença de um jogador de carne e osso.

Do que se disse pode-se concluir o seguinte: o número de partidas de xadrez é praticamente infinito, e por isso só na imaginação de pessoas ingênuas podem existir máquinas indi-

cadoras do movimento mais acertado. Por conseguinte, não há motivo para se temer uma crise no jogo de xadrez.

No entanto, nos últimos anos ocorreram acontecimentos que põem em dúvida a veracidade dessa afirmação. Agora *existem* máquinas que “jogam” xadrez. Referimo-nos aos computadores que permitem efetuar milhares de operações por segundo. Delas já falamos anteriormente. Mas como é mesmo que estas máquinas podem “jogar” xadrez?

É evidente que nenhuma máquina de calcular pode fazer outra coisa que não seja operar com números. Mas a máquina efetua as operações seguindo um esquema prévio e de acordo com um *programa* elaborado de antemão.

O “programa” de xadrez é composto por matemáticos com base numa determinada tática de jogo, entendendo-se por *tática* o conjunto de regras que permite escolher, para cada posição, a saída mais eficaz (a “melhor” do ponto de vista da tática considerada).

Vamos dar um dos exemplos dessa tática. A cada peça atribui-se um determinado número de pontos, que indica o seu valor.

Rei	+ 200	pontos	Peões	+1	ponto
Rainha	+ 9	»	Peão atrasado	−0,5	»
Torre	+ 5	»	Peão isolado	−0,5	»
Bispo	+ 3	»	Peão dobrado	−0,5	»
Cavalo	+ 3	»			

Além disso, atribui-se um determinado valor às posições mais favoráveis (mobilidade

das peças, posição destas mais perto do centro do que dos lados, etc.) que se expressa em décimos de ponto. Do número total de pontos atribuídos às brancas subtrai-se a soma dos pontos das pretas. A diferença refletirá, até certo ponto, a superioridade material e de posição que têm as brancas sobre as pretas. Se esta diferença for positiva, a situação das brancas será mais vantajosa do que a das pretas, e se é negativa, será menos vantajosa.

O computador calcula como pode mudar no decurso de três jogadas a diferença registrada. Indica a combinação mais vantajosa de três lances e registra-a num cartão próprio. Com isto faz a “jogada”, gastando nesta muito pouco tempo (dependendo este do programa e da velocidade operatória da máquina) de modo que não há motivo para temer o “zeit-not”*.

É certo que o fato de “prever” uma partida apenas com a antecipação de três jogadas caracteriza a máquina como um “jogador” bastante medíocre **. Mas podemos estar certos de que, com o rápido aperfeiçoamento da

* Existem também outros tipos de “tática” de xadrez. Por exemplo, no cálculo pode ter-se em conta não todas as jogadas que o adversário pode realizar, mas apenas as mais “sérias” (o xeque, o tomar alguma peça, o ataque, a defesa, etc.). Em outros casos, quando as jogadas do adversário são muito perigosas, pode-se efetuar o cálculo não apenas de três, mas de um maior número de lances. Também é possível considerar o uso de outra escala para os valores das peças. De uma ou de outra tática depende o “estilo” de jogo da máquina.

** Nas partidas dos melhores jogadores de xadrez, prevêm-se combinações de dez ou mais jogadas.

técnica de calcular, as máquinas “aprenderão” a “jogar” muito melhor.

Seria difícil expôr mais pormenorizadamente neste livro a composição de programas de xadrez para computadores. Examinaremos esquematicamente alguns tipos simples de programas no próximo capítulo.

Com três “2”

Certamente que todos sabem como se devem escrever três algarismos iguais para que se obtenha com eles um valor máximo: devemos considerar três noves e dispô-los assim: 9^{99} ,

isto é, escrevendo a potência de uma potência.

Este número é tão grande, que é impossível encontrar algo com que se possa comparar. O número de elétrons que formam todo o universo visível é insignificante relativamente a este número.

Procure a forma de conseguir o maior número possível com três dois sem utilizar qualquer sinal.

Solução

O exemplo anterior o induzirá sem dúvida a dispor os dois do mesmo modo, isto é, assim 2^{2^2} .

Contudo, neste caso não se consegue o efeito desejado. O resultado é até menor que 222. Realmente, apenas escrevemos 2^4 , isto é, 16.

O maior dos números que se pode formar com três dois não é nem 222 nem 22^2 (ou seja, 484), mas sim

$$2^{22} = 4\,194\,304.$$

O exemplo é muito instrutivo, pois ensina que em matemática é perigoso usar analogias: estas podem conduzir a conclusões erradas.

Com três “3”

Problema

Depois disto, talvez o leitor proceda com maior cuidado ao resolver o seguinte problema:

Escrever três “3” de forma a obter um valor máximo sem usar qualquer sinal.

Solução

A potência de potências não surte aqui o efeito desejado, porque 3^{33} , isto é, 3^{27} , é menor que 3^{33} .

A última disposição dos “3” é a que responde à pergunta formulada.

Com três “4”

Problema

Escrever três “4” de forma a obter um valor máximo sem recorrer a qualquer sinal.

Solução

Se seguirmos o exemplo dos dois exercícios anteriores, isto é, se escrevermos

$$4^{44},$$

não obtemos uma solução favorável, visto que, neste caso, a potência de potência

$$4^{4^4}$$

proporciona o valor máximo possível, dado que $4^4 = 256$ e 4^{256} é maior que 4^{44} .

Com três algarismos iguais

Tentemos aprofundar este intrigante fenômeno e esclarecer por que motivo quando formamos, com três algarismos iguais, uma potência, umas vezes obtemos números extraordinariamente grandes e outras não. Examinemos o caso geral.

Obter o maior número possível *com três algarismos iguais*, prescindindo de qualquer sinal.

Representemos o algarismo pela letra a .
A disposição

$$2^{22}, 3^{33}, 4^{44}$$

corresponde à expressão

$$a^{10^a + a}, \text{ isto é, } a^{11^a}.$$

A potência de potência, no seu aspecto geral, apresenta-se assim:

$$a^{a^a}.$$

Determinemos para que valor de a esta última disposição é de maior valor que a primeira. Como ambas as potências têm a mesma base, ao maior expoente corresponderá o maior valor.

Em que casos $a^2 > 11a$?

Dividindo ambos os membros da desigualdade por a , obtemos:

$$a^{a-1} > 11.$$

É fácil agora concluir que a^{a-1} é maior que 11 quando a for maior que 3, visto que $4^{4-1} > 11$,

enquanto que 3^2 e 2^1 são menores que 11.

Ficam, pois, explicadas as surpresas com que tropeçamos ao resolver os problemas precedentes: para os "2" e os "3", devíamos utilizar potências com expoentes de dois algarismos, e para os "4" ou algarismos maiores, teríamos de usar a potência de potência.

Com quatro "1"

Problema

Determinar o maior número possível com quatro "1" sem usar qualquer sinal.

Solução

O número 1111 não satisfaz as condições exigidas pelo problema, por ser muito menor que

$$11^{11}.$$

Seria muito trabalhoso determinar este número mediante 11 multiplicações consecutivas por 11. No entanto, o cálculo pode ser efetuado com muito maior rapidez, utilizando tábuas de logaritmos.

Este número ultrapassa os 285 bilhões e, portanto, é mais de 25 milhões de vezes maior que 1111.

Com quatro “2”

Problema

Resolvamos este problema para o caso de “2”.

Como devem dispor-se quatro “2” para que se obtenha um valor máximo?

Solução

As disposições possíveis são 8:

2222, 222^2 , 22^{22} , 2^{222}

22^{2^2} , $2^{2^2^2}$, $2^{2^{2^2}}$, $2^{2^{2^2}}$.

Qual destes valores é o maior?

Examinemos a primeira fileira.

O primeiro número, 2222, é nitidamente menor que as três potências que se seguem. Para fazer a comparação entre as duas seguintes:

222^2 e 22^{22} ,

transformemos a segunda delas:

$$2^{2^{2^2}} = 2^{2^2 \cdot 11} = (2^{2^2})^{11} = 484^{11}.$$

Esta última é maior que $2^{2^{2^2}}$, visto que tanto a base como o expoente de 484^{11} são maiores que os de $2^{2^{2^2}}$.

Comparemos agora $2^{2^{2^2}}$ com $2^{2^{2^2}}$. Substituamos $2^{2^{2^2}}$ por um número superior, $3^{2^{2^2}}$, e veremos que esta potência é menor que $2^{2^{2^2}}$.

De fato,

$$3^{2^{2^2}} = (2^5)^{2^2} = 2^{110},$$

que é menor que $2^{2^{2^2}}$.

Deste modo verificamos que o valor mais elevado da primeira fileira é $2^{2^{2^2}}$.

Comparemos agora entre si o número que acabamos de obter e os quatro seguintes:

$$2^{2^{2^2}}, \quad 2^{2^{2^2}}, \quad 2^{2^{2^2}}, \quad 2^{2^{2^2}}.$$

A última potência é igual apenas a 2^{16} , e por isso fica desde já eliminada. A primeira desta fileira é equivalente a 2^{2^4} e é menor que 3^{2^4} ou 2^{2^0} , sendo assim inferior às duas que se seguem.

Ficam só três potências para comparar, todas de base 2. É evidente que é maior a que tiver maior expoente. Das três

$$2^{2^2}, \quad 484 \quad \text{e} \quad 2^{2^0+2} (= 2^{10 \cdot 2} \cdot 2^2 \approx 10^6 \cdot 4),$$

a última é a maior.

Por isso o valor mais elevado que se pode obter com quatro "2" será expresso do seguinte modo:

$$2^{2^{2^2}}.$$

Sem recorrer à tábua de logaritmos, podemos fazer uma idéia do valor desta potência valendo-nos de um número aproximado:

$$2^{10} \approx 1000.$$

E assim, temos

$$2^{22} = 2^{20} \cdot 2^2 \approx 4 \cdot 10^6,$$

$$2^{222} \approx 2^{4\,000\,000} > 10^{1\,200\,000}.$$

Este número tem mais de um milhão de algarismos.

Capítulo II

A linguagem da álgebra

$$27=27$$

A arte de compor equações

A linguagem da álgebra são as equações. “Para resolver um problema referente a números ou relações abstratas entre quantidades, basta traduzir tal problema, do inglês ou de outra língua qualquer, para a linguagem algébrica”, escreveu o grande Newton no seu manual de álgebra intitulado *Aritmética Universal*. Isaac Newton mostrou, com exemplos, como devia ser feita a tradução. Eis aqui um deles:

Em língua vernácula:	Na linguagem da álgebra:
Um comerciante tinha uma determinada soma em dinheiro.	x
No primeiro ano gastou 100 libras.	$x - 100$
Acrescentou ao restante um terço deste.	$(x - 100) + \frac{x - 100}{3} =$ $= \frac{4x - 400}{3}$

Em língua vernácula:	Na linguagem da álgebra:
No ano seguinte tornou a gastar 100 libras	$\frac{4x-400}{3} - 100 =$ $= \frac{4x-700}{3}$
e aumentou a importância restante em um terço dela.	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} =$ $= \frac{16x-2800}{9}$
No terceiro ano gastou de novo 100 libras.	$\frac{16x-2800}{9} - 100 =$ $= \frac{16x-3700}{9}$
Depois de ter acrescido ao que ficou a sua terça parte	$\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} =$ $= \frac{64x-14\,800}{27}$
ficou com um capital duplo do inicial	$\frac{64x-14\,800}{27} = 2x$

Para determinar qual era o capital inicial do comerciante, basta resolver a última equação.

A determinação da solução de uma equação é, geralmente, uma tarefa fácil. E, ao contrário, encontrar uma equação baseada nos dados do problema costuma ser mais difícil.

Vimos que a arte de escrever equações consiste, de fato, em traduzir “da língua vernácula para a algébrica”. Mas o idioma da álgebra é extremamente lacônico e por isso nem todas as frases do idioma vernáculo são de fácil tradução. O grau de dificuldade dessas traduções pode ser muito diferente, como o leitor notará através dos exemplos de equações que apresentamos a seguir.

A vida de Diofanto

Problema

A história conservou poucos dados biográficos de Diofanto, notável matemático da antiguidade. Tudo o que se conhece a seu respeito encontra-se na dedicatória que figura no seu túmulo, escrita sob a forma de um problema de matemática. Reproduzimos a seguir essa inscrição:

Na língua vernácula:	Na linguagem da álgebra:
Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. E os números podem mostrar (milagre!) quão longa foi a sua vida,	x
cuja sexta parte foi a sua bela infância.	$\frac{x}{6}$

Na língua vernácula:	Na linguagem da álgebra:
Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos.	$\frac{x}{12}$
E a sétima parte de sua existência decorreu com um casamento estéril.	$\frac{x}{7}$
Passou mais um quinquênio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito,	5
cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai,	$\frac{x}{2}$
que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho.	4
Diz-me quantos anos tinha Diofanto quando morreu?	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

Solução

Resolvendo a equação, determina-se 84 como valor da incógnita (x) e ficamos conhecendo os seguintes dados biográficos de Diofanto: casou-se aos 21 anos, foi pai aos 38, perdeu o seu filho aos 80 anos e morreu aos 84.

O cavalo e o mulo

Problema

Apresentamos agora mais um antigo problema muito simples e fácil de traduzir na linguagem da álgebra.

“Um cavalo e um mulo caminhavam juntos levando no lombo sacos pesados. Lamentava-se o rocinante da sua pesada carga quando o mulo lhe disse: “De que se queixa? Se eu levasse um dos seus sacos, minha carga seria o dobro da sua. E se lhe desse um saco, sua carga seria igual à minha”.

Digam-me, doutos matemáticos, quantos sacos levava o cavalo e quantos levava o mulo.

Solução

Se eu levasse um de seus sacos, minha carga seria o dobro da sua. Se lhe desse um saco, sua carga seria igual à minha.	$\begin{array}{r} x-1 \\ y+1 \\ y+1=2(x-1) \\ y-1 \\ x+1 \\ y-1=x+1 \end{array}$
---	--

Resolvemos o problema mediante um sistema de equações com duas incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} y + 1 = 2(x - 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ y - x = 2. \end{array} \right.$$

Uma vez resolvido o sistema, vemos que $x = 5$ e $y = 7$. O cavalo levava 5 casos e o mulo, 7.

Os quatro irmãos

Problema

Quatro irmãos têm 45 rublos. Se o dinheiro do primeiro fosse aumentado em 2 rublos, o do segundo diminuído de 2 rublos, se o do terceiro duplicasse e o do quarto se reduzisse à metade, todos os irmãos teriam a mesma importância. Que dinheiro tinha cada um deles?

Solução

Os quatro irmãos têm 45 rublos.	$x + y + z + t = 45$
Se o dinheiro do primeiro fosse aumentado de 2 rublos	$x + 2$
o do segundo reduzido de 2,	$y - 2$

o do terceiro duplicasse,	$2z$
e o do quarto se reduzis- se à metade,	$\frac{t}{2}$
todos os irmãos teriam a mesma importância.	$x + 2 = y - 2 = 2z = \frac{t}{2}$

A última expressão permite-nos escrever três equações independentes:

$$x + 2 = y - 2,$$

$$x + 2 = 2z,$$

$$x + 2 = \frac{t}{2}.$$

Daqui concluímos que

$$y = x + 4,$$

$$z = \frac{x + 2}{2},$$

$$t = 2x + 4.$$

Substituindo estes valores na primeira equação, obteremos:

$$x + x + 4 + \frac{x + 2}{2} + 2x + 4 = 45,$$

de onde se tira que $x = 8$. A seguir, determinamos $y = 12$, $z = 5$ e $t = 20$. Logo, os irmãos tinham:

8; 12; 5 e 20 rublos.

As aves das margens de um rio

Problema

Nas obras de um matemático árabe do século XI encontramos o seguinte problema:

Em ambas as margens de um rio existem duas palmeiras, uma em frente da outra. A altura de uma é de 30 côvados e a altura da outra, 20. A distância entre os seus troncos é de 50 côvados. Na copa de cada palmeira está um pássaro. Subitamente os dois pássaros descobrem um peixe que aparece na super-

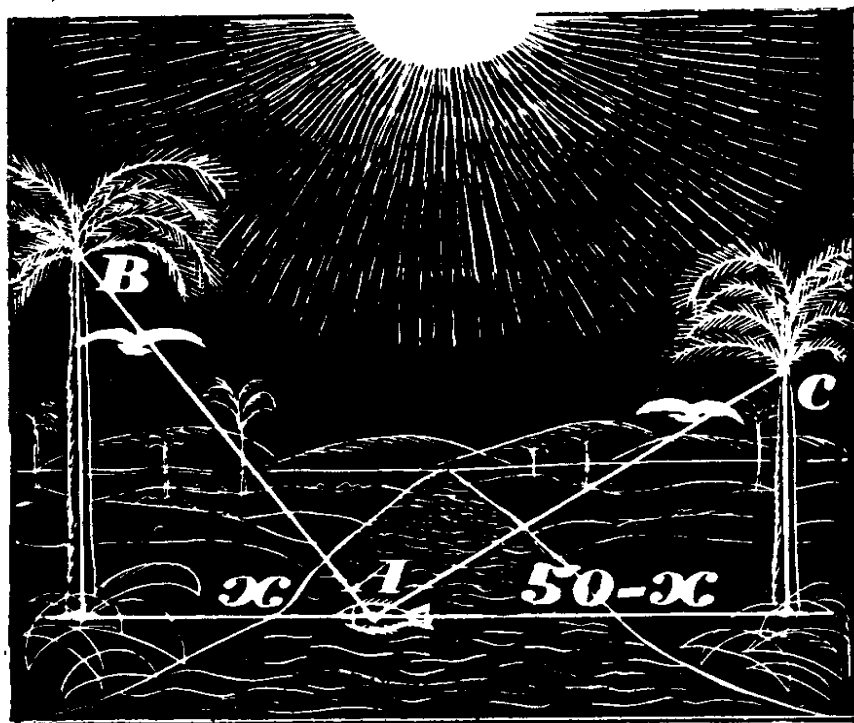


Fig. 5

fície da água, entre as duas palmeiras. Os pássaros lançam-se sobre ele e alcançam-no ao mesmo tempo (fig. 5).

A que distância do tronco da palmeira maior apareceu o peixe?

Solução

De acordo com a figura 5 e aplicando o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$AB^2 = 30^2 + x^2, \quad AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Mas $AB = AC$, visto que ambos os pássaros cobrem essa distância no mesmo tempo. Por isso

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Eliminando os parênteses e reduzindo os termos semelhantes, obtemos a equação do primeiro grau $100x = 2000$, de onde $x = 20$.

O peixe apareceu a 20 côvados da palmeira que tinha 30 côvados de altura.

O passeio

Problema

— Passe amanhã por minha casa — disse o velho médico a um seu conhecido.

— Muito obrigado. Sairei de minha casa amanhã às três horas. Talvez o senhor deseje dar também um passeio. Nesse caso saia à mesma hora e encontrar-nos-emos a meio do caminho,

— O senhor se esquece que já sou velho e ando apenas três quilômetros por hora, enquanto que você é jovem e, mesmo andando devagar, faz quatro quilômetros por hora. Não seria nenhum crime se me desse alguma vantagem.

— Tem razão — respondeu o jovem. — Como pretende que eu ande mais um quilômetro por hora que o senhor, dou-lhe esse quilômetro de vantagem, isto é, sairei de casa quinze minutos antes. Será suficiente?

— É muito amável — respondeu logo o ancião.

O jovem cumpriu o prometido e saiu de sua casa às três menos um quarto, caminhando a quatro quilômetros por hora. O médico saiu para a rua às três em ponto e andou três quilômetros por hora. Quando se encontraram, o ancião fez meia volta e juntos dirigiram-se à sua residência.

Apenas quando regressou à sua casa, o jovem compreendeu que, devido ao quarto de hora de vantagem concedida, teve que caminhar, não o dobro, mas o quádruplo do que andou o médico.

A que distância da casa do médico estava a do seu jovem conhecido?

Solução

Expressemos a distância que separa as casas por x (km). O jovem andou um total de $2x$ e o médico quatro vezes menos, isto é, $\frac{x}{2}$. Desde que saiu de casa até que se encontraram,

o médico andou metade do que percorreu no total, isto é, $\frac{x}{4}$, e o jovem caminhou o resto, ou seja, $\frac{3x}{4}$. O ancião caminhou durante $\frac{x}{12}$ horas enquanto que o jovem caminhou $\frac{3x}{16}$ horas. Além disto, sabemos que este caminhou mais um quarto de hora que o médico.

Podemos, portanto, escrever a seguinte equação:

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4},$$

de onde $x = 2,4$ km.

Entre as duas casas mediava uma distância de 2,4 km.

O grupo de ceifeiros

Problema

Nas recordações sobre L. Tolstoi, o conhecido físico A. Tsinger relata o seguinte problema que agradava imensamente ao eminente escritor:

“Um grupo de ceifeiros tinha que ceifar dois prados, um dos quais tinha uma área dupla da do outro. Durante meio dia, todo o pessoal do grupo trabalhou no prado grande. Depois do almoço, metade do pessoal continuou no prado grande e a outra trabalhou no prado pequeno. Durante a tarde acabaram ambas as tarefas exceto um pequeno

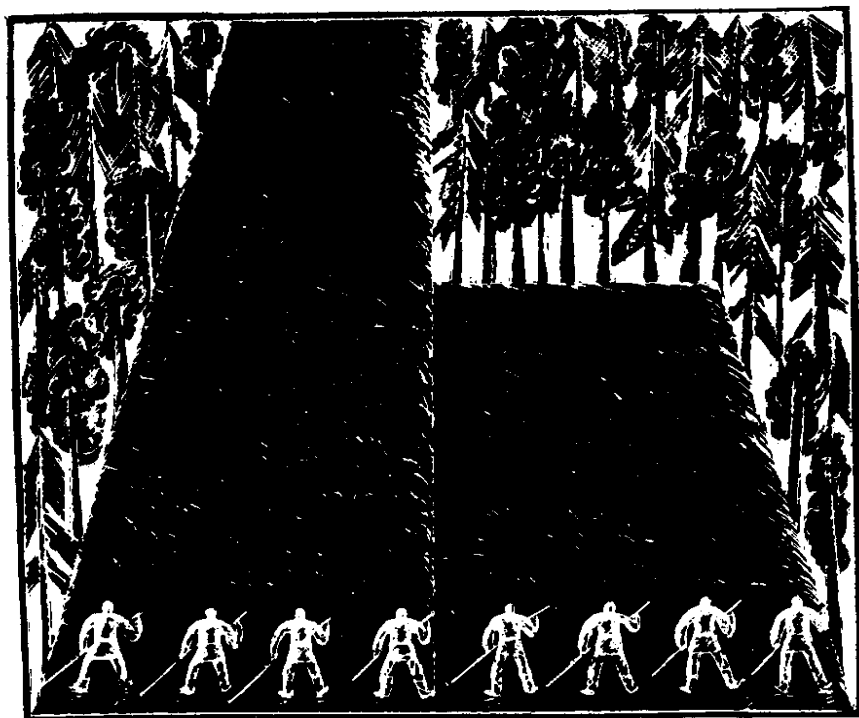


Fig. 6

setor do prado menor, em cuja ceifa se ocupou todo o dia seguinte apenas um ceifeiro.

Quantos ceifeiros tinha este grupo?"

Solução

Neste exercício, além da incógnita principal — o número de ceifeiros — que representamos por x , é conveniente introduzir uma outra incógnita auxiliar: a superfície do setor ceifado por um trabalhador num só dia, que representamos o por y .

Embora o problema não exija que se determine o valor de y , este ajuda a encontrar o valor de x .

Representemos a superfície do prado grande por meio de x e y . Este prado foi ceifado durante meio dia por x trabalhadores, que ceifaram, portanto,

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}.$$

Na segunda metade do dia, trabalhou ali metade do pessoal, isto é, $\frac{x}{2}$, e ceifaram

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}.$$

Como no final do dia todo o prado estava ceifado, a sua área será:

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

Expressemos agora a área do prado menor em função de x e y . Durante meio dia trabalharam nele $\frac{x}{2}$ ceifadores que ceifaram uma área de $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$. Acrescentemos a isto o setor que ficou por ceifar, que é igual a y (a área ceifada por um trabalhador num dia) e teremos a área do prado menor:

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}.$$

Resta-nos traduzir para a linguagem da álgebra a frase “o primeiro prado tem uma área dupla da do segundo” e a equação estará

composta:

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy+4y}{4} = 2 \quad \text{ou} \quad \frac{3xy}{xy+4y} = 2.$$

Dividindo por y o numerador e o denominador da fração da segunda equação, elimina-se a incógnita auxiliar, resultando a seguinte equação:

$$\frac{3x}{x+4} = 2 \quad \text{ou} \quad 3x = 2x + 8,$$

de donde $x = 8$.

No grupo havia 8 ceifeiros.

Depois que foi lançada a primeira edição da *Álgebra Recreativa* na língua original, o professor A. Tsinger enviou-me uma informação detalhada e muito interessante relacionada com este problema. O fato essencial do problema, em seu entender, reside em que “ele não é absolutamente algébrico mas sim aritmético e, ainda que seja muito simples, encontram-se certas dificuldades na sua resolução por não ser do tipo comum”.

“A história do presente problema é a seguinte — continua o professor A. Tsinger.— Na Faculdade de Matemática da Universidade de Moscou, quando nela estudavam meu pai e I. Raievski, meu tio (amigo íntimo de L. Tolstoi), entre outras disciplinas ensinava-se algo semelhante à pedagogia. Com este objetivo, os estudantes deviam ir a uma escola pública posta à disposição da Universidade e, em colaboração com peritos e conceituados professores, realizavam a prática pedagógica. Entre os companheiros de estudos de Tsinger

e Raievski figurava um tal Petrov que, segundo contam, era uma pessoa muito inteligente e extremamente original. Esse Petrov (que faleceu muito jovem, creio que de tuberculose) afirmava que as aulas de aritmética estupidificavam os alunos com problemas e métodos estereotipados. Para evidenciar o seu ponto de vista, Petrov inventava problemas que, por saírem das normas habituais, embaraçavam os “peritos e conceituados professores”, mas que os alunos mais lúcidos, ainda não apalermados por um estudo rotineiro, resolviam facilmente. Entre tais problemas (Petrov inventou vários) estava o dos ceifeiros. Os professores com experiência podiam, é claro, resolvê-lo com facilidade mediante equações, mas não descobriam a sua simples resolução aritmética. No entanto, o problema é tão fácil que para resolvê-lo não é necessário recorrermos à álgebra.

Se o prado maior foi ceifado por todo o pessoal em meio dia e por metade do pessoal no resto do dia, é evidente que metade do pessoal ceifou em meio dia $\frac{1}{3}$ do prado. Logo, do prado menor ficou por ceifar $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. E se um trabalhador ceifa por dia $\frac{1}{6}$ do prado e se ceifaram num dia $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$, isto significa que eram 8 os trabalhadores.

Tolstoi, adepto desde sempre de problemas que se resolvem com algum subterfúgio e que oferecem alguma dificuldade, conhecia desde a juventude este problema, o dos ceifei-

ros, graças a meu pai. Quando tive ocasião de falar de tal problema com Tolstoi, já então ancião, vi que lhe agradava sobretudo o fato

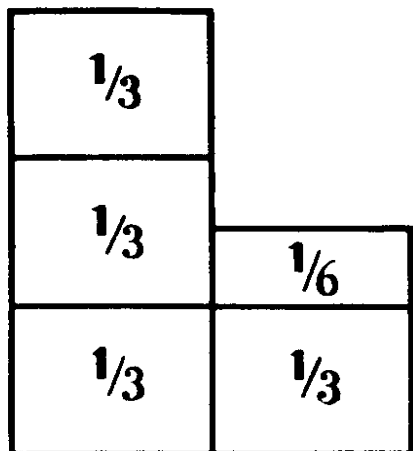


Fig. 7

de o problema se tornar mais compreensível se, para resolvê-lo, empregarmos este diagrama simples (fig. 7).

A seguir, apresentamos alguns problemas que, com alguma imaginação, são mais fáceis de resolver por meio da aritmética do que pela álgebra.

As vacas no prado

Problema

“Ao estudar as Ciências, os exercícios são mais úteis que as regras”— escreveu Newton na sua *Aritmética Universal*, na qual acompanhava as indicações teóricas com uma série

de exemplos. Entre eles encontra-se o das vacas que pastam no prado e que deu origem a um tipo específico de problemas:

“A erva de um prado cresce em todo ele, com igual rapidez e espessura. Sabe-se que 70 vacas comeriam a erva em 24 dias e 30 em 60 dias. Quantas vacas comeriam a erva em 96 dias?”

Este problema serviu de argumento para um conto humorístico, que vem no *Professor Particular* de Tchékhov. Dois adultos, familiares do aluno a quem propuseram resolver este problema, esforçavam-se inutilmente por encontrar a sua solução e ficavam surpreendidos:

— Que estranho é o problema! — disse um. — Se em 24 dias 70 vacas comem toda a erva, quantas a comerão em 96 dias? É evidente que $\frac{1}{4}$ de 70, isto é, $17\frac{1}{2}$ vacas... E este é o primeiro absurdo! O segundo ainda mais surpreendente é que se 30 vacas comem a erva em 60 dias, em 96 a comeriam $18\frac{3}{4}$. Além disso, se 70 vacas comem a erva em 24 dias, 30 vacas gastariam nisso 56 dias e não 60, como afirma o problema.

— Mas não temos que ter em conta que a erva cresce sem cessar? — perguntou o outro.

A observação era lógica. A erva cresce incessantemente, circunstância que não podemos esquecer, caso contrário não só não podíamos resolver o problema como também as condições postas seriam contraditórias.

Como resolver, então, o problema?

Solução

Introduzamos aqui também uma segunda incógnita, que representará o crescimento diário de erva, expresso em partes das reservas da mesma no prado. Num dia há um crescimento de y . Em 24 dias o crescimento será $24y$. Se consideramos todo o pasto como 1, então em 24 dias as vacas comeriam

$$1 + 24y.$$

Num dia, as 70 vacas comeriam

$$\frac{1 + 24y}{24},$$

e uma vaca (das 70) comeria

$$\frac{1 + 24y}{24 \cdot 70}.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos escrever que, se 30 vacas acabam com a erva do prado em 60 dias, uma vaca comerá num dia

$$\frac{1 + 60y}{30 \cdot 60}.$$

Mas a quantidade de erva comida por uma vaca num só dia é igual para os dois rebanhos. Por isso

$$\frac{1 + 24y}{24 \cdot 70} = \frac{1 + 60y}{30 \cdot 60},$$

portanto

$$y = \frac{1}{480}.$$

Determinado o valor de y (crescimento diário da erva), é fácil determinar que parte

da reserva inicial come uma vaca num dia

$$\frac{1 \cdot 24y}{24 \cdot 70} = \frac{1 + 24 \cdot \frac{1}{480}}{24 \cdot 70} = \frac{1}{1600}.$$

Por último compomos a equação que permite a solução definitiva do problema: se o número de vacas é x , então

$$\frac{1 + 96 \cdot \frac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1600},$$

de onde $x = 20$.

20 vacas comeriam toda a erva em 96 dias.

O problema de Newton

Vejamos agora um problema do mesmo tipo do anterior: o problema acerca dos bois.

O problema, na realidade, não foi inventado por Newton, sendo antes de origem popular.

“Três prados cobertos de erva de igual espessura e do mesmo grau de crescimento têm uma superfície de $3\frac{1}{3}$ ha, 10 ha e 24 ha.

A erva do primeiro foi comida por 12 bois durante 4 semanas e a do segundo por 21 bois em 9 semanas. Quantos bois comerão a erva do terceiro prado em 18 semanas?”.

Solução

Introduzamos a incógnita auxiliar y que significa a parte da reserva inicial de erva que cresce num hectare durante uma semana. No primeiro prado cresce durante a primeira semana uma quantidade de erva igual a $3\frac{1}{3}y$

e durante 4 semanas $3\frac{1}{3}y \cdot 4 = \frac{40}{3}y$ da reserva que havia inicialmente num hectare. Isto equivale a um aumento da superfície inicial do prado para

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y\right)$$

hectares. Em outras palavras: os bois comem tanta erva quanto é necessária para cobrir um prado de $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ ha. Numa semana 12 bois comem um quarto dessa quantidade e um boi come numa semana $\frac{1}{48}$ dessa erva, isto é, a erva que há numa área de

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40y}{3}\right) : 48 = \frac{10 + 40y}{144}$$

hectares.

Do mesmo modo, com os dados do segundo prado, determinaremos a área deste que alimenta um só boi durante uma semana:

crescimento da erva em	1 ha	durante	1 semana	= y,
»	»	»	1 »	» 9 semanas = 9y,
»	»	»	10 »	» 9 » = 90y.

A área do setor que tem erva suficiente para alimentar 21 bois durante 9 semanas é igual a

$$10 + 90y.$$

A área necessária para manter um boi durante uma semana será:

$$\frac{10 + 90y}{9 \cdot 21} = \frac{10 + 90y}{189}$$

hectares. Ambas as normas de alimentação devem ser iguais:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189}.$$

Resolvendo esta equação, obtemos $y = \frac{1}{12}$.

Vejamos agora qual deve ser a área do prado com erva suficiente para manter um boi durante uma semana:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 40 \cdot \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54}$$

hectares. Finalmente, procuremos responder à pergunta formulada no problema.

Se representarmos o número desconhecido de bois por x , teremos:

$$\frac{24 + 24 \cdot 18 \cdot \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54},$$

de onde $x = 36$.

O terceiro prado pode sustentar 36 bois durante 18 semanas.

A troca dos ponteiros do relógio

Problema

A. Moshkovski, biógrafo e amigo do famoso físico Albert Einstein, desejando distrair este durante a sua doença, propôs-lhe resolver o seguinte problema (fig. 8):

“Consideremos um relógio — disse Moshkovski — que tenha os ponteiros nas 12 horas. Se nesta posição o ponteiro dos minutos e o das horas trocassem de posição, a hora marcada seria a mesma. Mas a outras horas, por exemplo, às 6, essa permutação dos ponteiros

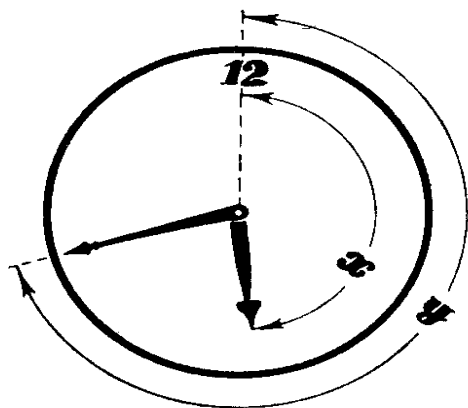


Fig. 8

daria lugar a um absurdo, a uma situação que num relógio que funciona normalmente seria impossível: o ponteiro dos minutos não pode encontrar-se nas 6 quando o das horas se encontra nas 12. Daqui surge a seguinte pergunta: De quanto em quanto tempo ocupam os ponteiros do relógio uma posição tal que, ao trocar as funções destes, se obtenham novas situações possíveis num relógio normal?

— Sim — respondeu Einstein —, este problema é muito apropriado para uma pessoa obrigada, pela sua doença, a permanecer na cama: desperta bastante interesse e não é muito fácil. Porém, temo que a distração dure

pouco tempo: já encontrei a forma de resolvê-lo.

Ajeitou-se na cama e com alguns traços desenhou no papel um esquema que refletia as condições do problema. Einstein não necessitou para resolvê-lo de mais tempo do que eu tinha gasto para o enunciar”....

Como se resolve este problema?

Solução

Meçamos a distância que percorrem os ponteiros, a partir das 12 horas, valendo-nos das 60 divisões do mostrador.

Suponhamos que, numa das posições procuradas, o ponteiro das horas se encontra a x divisões do número 12, e o ponteiro dos minutos a y divisões. Como as 60 divisões são percorridas pelo ponteiro das horas em 12 horas, isto é, a 5 divisões por hora, então este ponteiro percorre x divisões do mostrador em $\frac{x}{5}$ horas. Em outras palavras, passam $\frac{x}{5}$ horas desde que o relógio marcou 12 horas. O ponteiro dos minutos percorre as y divisões em y minutos, isto é, $\frac{y}{60}$ horas. Expressando isto de outro modo: o ponteiro dos minutos passou pelo número 12 há $\frac{y}{60}$ horas, ou seja, ao fim, de

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60}$$

horas depois de ambos os ponteiros se terem encontrado nas 12 horas. Este número também

é inteiro (do zero ao 11), já que nos indica quantas horas *completas* passaram desde as 12 horas.

Ao trocar a função dos ponteiros concluímos, por analogia, que a partir das 12 passaram

$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60}$$

horas completas. Este número também é inteiro (do zero ao 11).

Temos, pois, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m, \\ \frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n, \end{cases}$$

onde m e n são números inteiros entre 0 e 11.

Determinando o valor das incógnitas, obtemos:

$$x = \frac{60(12m + n)}{143},$$

$$y = \frac{60(12n + m)}{143}.$$

Atribuindo a m e a n valores compreendidos entre 0 e 11, determinemos todas as posições dos ponteiros que se encontram nas condições do problema. Como cada um dos 12 valores que tem m pode ser agrupado com cada um dos 12 de n , talvez pareça que o número de soluções é igual a $12 \cdot 12 = 144$. Mas na realidade há apenas 143 porque, quando $m = 0$,

$n = 0$ e $m = 11$, $n = 11$, os ponteiros ocupam a mesma posição.

Quando $m = 11$ e $n = 11$, temos

$$x = 60 \quad \text{e} \quad y = 60,$$

isto é, os ponteiros estão nas 12 horas, como no caso de $m = 0$ e $n = 0$.

Não vamos examinar todas as posições possíveis. Consideraremos apenas dois casos.

Primeiro caso:

$$m = 1, \quad n = 1;$$

$$x = \frac{60 \cdot 13}{143} = 5 \frac{5}{11}, \quad y = 5 \frac{5}{11},$$

ou seja, o relógio marca uma hora e $5 \frac{5}{11}$ minutos. Neste momento os ponteiros estão no mesmo lugar e por isso podem trocar de funções (como sempre que coincidam).

Segundo caso:

$$m = 8, \quad n = 5;$$

$$x = \frac{60 (5 + 12 \cdot 8)}{143} \approx 42,38,$$

$$y = \frac{90 (8 + 12 \cdot 5)}{143} \approx 28,53.$$

Os respectivos momentos são: 8 horas e 28,53 minutos e 5 horas e 42,38 minutos.

O número de soluções é, como se indicou, 143. Para determinar os pontos do mostrador onde se encontram as posições procuradas dos ponteiros, temos que dividir a circunferência do mostrador em 143 partes iguais. Nos pontos intermediários não há posições dos ponteiros que satisfaçam as condições do problema.

Coincidências dos ponteiros

Problema

Em quantas posições coincide o ponteiro das horas com o dos minutos num relógio que funcione normalmente?

Solução

Podemos valermo-nos das equações do problema anterior, já que se os ponteiros coincidem, podem trocar entre si as suas funções sem que haja qualquer alteração. Neste caso, ambos os ponteiros percorreram o mesmo número de divisões a partir de 12, isto é, $x = y$. Por esse motivo, os raciocínios aplicados no problema anterior oferecem-nos a seguinte expressão:

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{60} = m,$$

onde m é um número inteiro compreendido entre 0 e 11. Determinando o valor da incógnita, obtemos

$$x = \frac{60m}{11}.$$

Com os doze valores de m (de 0 a 11) obtemos não 12 mas apenas 11 posições diferentes dos ponteiros, visto que sendo $m = 1$, obtemos $x = 0$, isto é, ambos os ponteiros percorreram 60 divisões e encontram-se no 12. O mesmo sucede quando $m = 0$.

Arte de adivinhar números

Todos nós já nos encontramos, sem dúvida, com “prestidigitadores” capazes de adivinhar números. Um prestidigitador geralmente propõe realizar operações do seguinte carácter: pensar um número qualquer, acrescentar 2, multiplicar o resultado por 3, subtrair 5, subtrair o número pensado, etc., no total umas cinco ou dez operações. A seguir, o prestidigitador pede que se lhe comunique o resultado e, ao obter a resposta, diz logo qual foi o número pensado.

É claro que o segredo da “prestidigitação” é muito fácil e se baseia sempre nas mesmas equações.

Suponhamos que um prestidigitador lhe tenha proposto realizar o conjunto de operações indicado na coluna esquerda da seguinte tabela:

Pense um número,	x
acrescente-lhe 2,	$x + 2$
multiplique o resultado por 3,	$3x + 6$
subtraia 5,	$3x + 1$
subtraia o número pensado,	$2x + 1$
multiplique por 2,	$4x + 2$
subtraia 1	$4x + 1$

A seguir, o prestidigitador pede que se lhe diga o resultado final e, ao obtê-lo, diz logo o número pensado. Como é que o faz?

Para compreender isto, deve-se examinar a coluna direita da tabela, onde as indicações do prestidigitador estão traduzidas para a linguagem da álgebra. Examinando esta coluna, pode-se compreender que, se pensamos um número x qualquer, então, efetuadas todas as operações, obtém-se $4x + 1$. Conhecendo este resultado, não é difícil “adivinhar” o número.

Suponhamos, por exemplo, que dissemos ao prestidigitador que o resultado é 33. Então ele resolve mentalmente num instante a equação $4x + 1 = 33$ e obtém a resposta: $x = 8$. Em outras palavras, é preciso subtrair 1 do resultado final ($33 - 1 = 32$) e dividir por 4 o número obtido ($32 : 4 = 8$); o resultado desta divisão é o número pensado (8). Se o resultado final for 25, o prestidigitador faz mentalmente as seguintes operações $25 - 1 = 24$, $24 : 4 = 6$ e nos comunica o número que pensamos, 6.

Como se vê, é tudo muito fácil. O prestidigitador sabe de antemão o que é preciso fazer com o resultado para obter o número pensado.

Depois de compreender isto, o leitor pode deixar admirados e embaraçados ainda mais os seus amigos sugerindo que eles próprios escolham, a seu critério, o carácter das operações a serem efetuadas com um número pensado. Proponha a um seu amigo pensar um número e efetuar em qualquer ordem operações do seguinte carácter: adicionar ou subtrair um

número conhecido (por exemplo: somar 2, diminuir 5, etc.), multiplicar * por um número conhecido (por 2, por 3, etc.), adicionar ou subtrair o número pensado. O seu amigo procurará confundi-lo, amontoando uma série de operações. Por exemplo, ele pensou o número 5 (o número pensado não é comunicado ao leitor) e, efetuando operações, diz:

— Pensei um número, multipliquei-o por 2, adicionei 3 ao resultado, depois adicionei o número pensado; adicionei 1 ao resultado, multipliquei tudo por 2, subtraí o número pensado, depois subtraí 3, subtraí novamente o número pensado, subtraí 2. Por fim, multipliquei o resultado por 2 e adicionei 3.

O seu amigo, convencido de que o confundiu por completo, diz-lhe, triunfante:

— o resultado final é 49.

Para a perplexidade de seu amigo, o leitor diz imediatamente que ele pensou o número 5.

Como é que o leitor o faz? Agora isto já é bastante claro. Quando o seu amigo lhe comunica as operações que ele está efetuando com o número pensado, o leitor ao mesmo tempo atua mentalmente com a incógnita x . Ele lhe diz: "Pensei um número...", você repete mentalmente: "Então temos x ". Ele diz: "... multipliquei-o por 2..." (ele realmente efetua a multiplicação dos números), você prossegue mentalmente: "... agora temos $2x$ ". Ele diz: "... adicionei 3 ao resultado...", você segue imediatamente: $2x + 3$, etc.

* É melhor não lhe permitir dividir, pois a divisão complica muito a "prestidigitação".

Quanto ele o tiver “embaralhado” completamente e efetuado todas as operações mencionadas anteriormente, você terá chegado ao resultado indicado na tabela seguinte (na coluna esquerda está escrito tudo o que foi dito em voz alta pelo seu amigo e na direita, as operações que você fez mentalmente):

Pensei um número,	x
multipliquei-o por 2,	$2x$
adicionei 3 ao resultado,	$2x + 3$
depois adicionei o número pensado,	$3x + 3$
agora adicionei 1,	$3x + 4$
multipliquei o resultado por 2,	$6x + 8$
subtraí o número pensado,	$5x + 8$
subtraí 3,	$5x + 5$
voltei a subtrair o número pensado,	$4x + 5$
subtraí 2,	$4x + 3$
por fim, multipliquei o resultado por 2,	$8x + 6$
e adicionei 3	$8x + 9$

Você pensou por último: o resultado final é $8x + 9$. Agora ele diz: “O resultado final é 49”. Você tem já a equação feita: $8x + 9 =$

= 49. Resolvê-la é fácilimo, e você lhe comunica logo que ele havia pensado o número 5.

Esta prestidigitação é particularmente impressionante porque as operações que se têm de efetuar com o número pensado não são propostas por você, mas sim “inventadas” pelo seu amigo.

No entanto, há um caso em que a prestidigitação não tem êxito. Se você, depois de realizar (calculando mentalmente) uma série de operações, obteve, por exemplo, $x + 14$, e o seu amigo diz logo: “... agora subtraí o número pensado e o resultado final é 14”, você prossegue $(x + 14) - x = 14$, realmente se obteve 14, mas não existe nenhuma equação e por isso você não pode adivinhar o número pensado. Que é necessário fazer neste caso? Aja assim: logo que você obtiver o resultado que não contém a incógnita x , interrompa o seu amigo dizendo-lhe: “Pare! Agora posso, sem perguntar nada, comunicar-lhe o resultado que você obteve. É 14”. Isto deixará o seu amigo completamente desconcertado, pois ele não lhe disse absolutamente nada. Embora você não tenha sabido adivinhar o número pensado, a prestidigitação terá sido esplêndida.

Eis mais um exemplo (como antes, na coluna esquerda se encontra o que diz o seu amigo):

Pensei um número,	x
a este número adicionei 2,	$x + 2$
multipliquei o resultado por 2,	$2x + 4$

agora adicionei 3,	$2x + 7$
subtraí o número pensado,	$x + 7$
adicionei 5,	$x + 12$
depois subtraí o número pensado...	12

No momento em que o resultado der 12, isto é, uma expressão que não tenha mais a incógnita x , você interrompe o amigo comunicando-lhe que agora o resultado é 12.

Depois de praticar um pouco, você conseguirá facilmente mostrar aos seus amigos “prestidigitações” deste tipo.

Um pretenso absurdo

Problema

Apresentamos agora um problema que pode parecer completamente absurdo:

Quanto vale 84 se $8 \cdot 8 = 54$?

Esta insólita pergunta está muito longe de carecer de sentido e pode ser resolvida através de equações.

Experimente descobri-las.

Solução

O leitor deve ter compreendido que os dados do problema não pertencem ao sistema decimal, uma vez que nesse caso a pergunta “quanto vale 84” seria absurda. Suponhamos

que a base do sistema de numeração desconhecida é x . O número "84" vale então 8 unidades de segunda ordem e 4 unidades de primeira ordem, isto é,

$$\text{"84"} = 8x + 4.$$

O número "54" equivale a $5x + 4$.

Temos, portanto, a equação: $8 \cdot 8 = 5x + 4$, o que significa que no sistema de numeração decimal seria $64 = 5x + 4$, de onde $x = 12$.

Os números estão expressos no sistema de base 12 e "84" $= 8 \cdot 12 + 4 = 100$. Portanto, se $8 \cdot 8 = \text{"54"}$, "84" será igual a "100".

Do mesmo modo se resolvem outros problemas deste tipo:

Qual é o número equivalente a 100, se $5 \cdot 6 = 33$?

Resposta: 81 (sistema de base 9).

A equação pensa por nós

Se não acredita que as equações são às vezes mais previdentes que nós próprios, resolva este problema:

O pai tinha 32 anos e o filho 5. Ao fim de quantos anos será a idade do pai dez vezes maior que a do filho?

Designemos o tempo procurado por x . Ao fim de x anos o pai terá $32 + x$ anos e o filho $5 + x$ anos. Como o pai deve ter 10 vezes mais anos que o filho, obteremos a equação: $32 + x = 10(5 + x)$.

Resolvendo-a encontramos $x = -2$.

“Ao fim de menos dois anos” significa “há dois anos”. Quando equacionamos o problema, não pensamos que *no futuro* a idade do pai nunca seria 10 vezes superior à do filho e que esta correlação só poderia existir *no passado*. A equação foi mais prudente que nós e recordou-nos o nosso descuido.

Curiosidades e surpresas

Há ocasiões em que, ao resolver equações, tropeçamos com soluções que podem desconcertar um matemático pouco hábil. Vejamos alguns exemplos:

1. Determinar um número de dois algarismos que tenha as seguintes propriedades:

O algarismo das dezenas deve ser em 4 unidades inferior ao algarismo das unidades. Se escrevermos esse número, invertendo a ordem dos algarismos e lhe subtraírmos o número procurado, obteremos 27.

Expressando o algarismo das dezenas por x e o das unidades por y , formaremos facilmente o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x = y - 4, \\ (10y + x) - (10x + y) = 27. \end{cases}$$

Se substituirmos o valor de x da primeira equação na segunda, vem:

$$10y + y - 4 - [10(y - 4) + y] = 27,$$

e eliminando os parênteses e reduzindo os termos semelhantes, obteremos:

$$36 = 27.$$

Não se encontrou o valor das incógnitas mas “viu-se” que $36 = 27...$ Que significa isto?

Isto significa que não existe nenhum número de dois algarismos que responda às condições do problema e que as equações propostas se contradizem. De fato, multiplicando ambos os membros da primeira equação por 9, obtemos:

$$9y - 9x = 36,$$

e da segunda (depois de abrir os parênteses e reduzir os termos semelhantes) vem:

$$9y - 9x = 27.$$

De acordo com a primeira equação, $9y - 9x$ é igual a 36, e de acordo com a segunda vale 27. Isto é, sob todos os pontos de vista, impossível, visto que $36 \neq 27$.

Uma condição análoga espera quem resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2y^2 = 8, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Dividindo membro a membro a primeira equação pela segunda, obteremos:

$$xy = 2,$$

e se compararmos a equação obtida com a segunda do sistema, veremos que

$$\begin{cases} xy = 4, \\ xy = 2, \end{cases}$$

isto é, $4 = 2$. Não há números que satisfaçam às condições deste sistema. (Os sistemas de equações que, como os que acabamos de ver, não têm soluções chamam-se *incompatíveis*).

2. Se mudarmos um pouco as condições do problema anterior, teremos outra surpresa. Suponhamos que a diferença entre o algarismo das unidades e o das dezenas é 3. As restantes condições permanecem. Qual é esse número?

Determinemos a equação. Se expressarmos o algarismo das dezenas por x , o das unidades será $x + 3$. Traduzamos agora o problema para a linguagem da álgebra:

$$10(x + 3) + x - [10x + (x + 3)] = 27.$$

Abrindo os parênteses e reduzindo os termos semelhantes, obtemos

$$27 = 27.$$

Esta igualdade é incontestável, mas nada nos diz sobre o valor de x . Significa isto que não existe nenhum valor que responda às condições do problema? Ao contrário, isto deve-se ao fato de a igualdade dada ser uma identidade, isto é, é verdadeira qualquer que seja o valor de x . De fato, as condições do problema são válidas para qualquer número de dois algarismos cujo algarismo das unidades exceda em 3 unidades o das dezenas:

$$14 + 27 = 41, \quad 47 + 27 = 74,$$

$$25 + 27 = 52, \quad 58 + 27 = 85,$$

$$36 + 27 = 63, \quad 69 + 27 = 96.$$

3. Determinar um número de três algarismos tal que:

- 1) o algarismo das dezenas seja 7;
- 2) o algarismo das centenas seja inferior em 4 ao algarismo das unidades;
- 3) se escrevermos os algarismos na ordem inversa, o número obtido excederá em 396 unidades o número procurado.

Determinemos a equação representando por x o algarismo das unidades:

$$100x + 70 + x - 4 - [100(x - 4) + 70 + x] = 396.$$

Resolvendo, obtemos

$$396 = 396.$$

Já sabemos como interpretar resultados deste tipo. Isto significa que um número de três algarismos, tal que o primeiro é menor que o terceiro em 4 unidades *, aumenta em 396 se escrevermos os seus algarismos na ordem inversa.

Até agora examinamos problemas que têm um caráter mais ou menos artificial e teórico. O seu objetivo foi o de contribuir para que se aprendesse a compor e resolver equações. Agora, armados teoricamente, damos alguns exemplos de problemas relacionados com a produção, a vida cotidiana e a atividade militar e esportiva.

* O algarismo das dezenas não desempenha nenhum papel.

Na barbearia

Problema

Pode a álgebra ter alguma aplicação na barbearia? Tais casos são possíveis. Convenci-me disso em certa ocasião, quando, encontrando-me num desses estabelecimentos, um barbeiro se dirigiu a mim com um pedido inesperado:

— Não poderia o senhor resolver-nos um problema que não conseguimos resolver?

— De que se trata? — perguntei.

— Temos duas soluções de água oxigenada: uma a 30% e a outra a 3%. Devemos misturá-las de forma a obter uma solução a 12%. Porém não conseguimos encontrar a proporção certa...

Deram-me um papel e determinei a proporção que procuravam. O problema foi até muito fácil de resolver.

Solução

O problema pode ser resolvido também por meio da aritmética, mas através da álgebra obtém-se o resultado com maior simplicidade e rapidez. Suponhamos que para conseguir a mistura a 12% temos que misturar x gramas da solução a 30% e y gramas da solução a 30%. Sendo assim, a primeira porção conterá $0,03x$ gramas de água oxigenada pura e a segunda $0,3y$. No total haverá

$$0,03x + 0,3y.$$

Disto resultarão $(x + y)$ gramas de solução na qual a água oxigenada pura será $0,12(x + y)$.

Temos, então, a equação

$$0,03x + 0,3y = 0,12(x + y).$$

Desta equação encontramos que $x = 2y$, isto é, devemos misturar com uma certa quantidade de solução a 30%, o dobro da solução de 3%.

O bonde e o pedestre

Problema

Quando caminhava ao longo de uma linha de bonde, observei que em cada 12 minutos era alcançado por um bonde e que de 4 em 4 minutos passava outro em sentido contrário. Tanto os bondes como eu próprio nos deslocávamos com uma velocidade constante.

De quantos em quantos minutos saíam os bondes dos pontos finais?

Solução

Se os bondes partiam de x em x minutos, isto significa que no lugar onde me encontrava com um bonde passaria o seguinte x minutos depois. Se o bonde me alcança, nos $12 - x$ minutos restantes ele percorria o caminho que eu fazia em 12 minutos. Isto significa que o caminho que eu andava num minuto, o bonde o fazia em $\frac{12 - x}{12}$ minutos.

Se o bonde seguia na direção contrária, cruzávamo-nos 4 minutos depois de me ter cruzado com o anterior, e nos restantes $(x - 4)$ minutos ele devia percorrer o caminho que eu andava nesses 4 minutos. Portanto, para cobrir a distância que eu percorria num minuto, o bonde gastava $\frac{x-4}{4}$ minutos.

Obtemos a equação:

$$\frac{12-x}{12} = \frac{x-4}{4}.$$

De onde $x = 6$. Em cada 6 minutos partia um bonde.

O problema pode também ser resolvido do modo seguinte (é, no essencial, uma resolução aritmética).

Designemos pela letra a a distância que separava dois bondes que seguiam um após outro. Então a distância que mediava entre o bonde que ia ao meu encontro e eu próprio diminuía de $\frac{a}{4}$ em cada minuto (já que a distância entre o bonde que acabava de passar e o seguinte, igual a a , era percorrida por nós juntos em 4 minutos). Se o bonde seguia na mesma direção que eu, a distância entre nós reduzia-se de $\frac{a}{12}$ em cada minuto. Suponhamos que eu caminhava para diante durante um minuto e depois andava para trás outro minuto (isto é, regressava ao ponto de partida). Neste caso, a distância que mediava entre o bonde que seguia ao meu encontro diminuía no primeiro minuto de $\frac{a}{4}$ e no segundo minuto

de $\frac{a}{12}$. Portanto, em 2 minutos a distância entre nós reduzia-se em $\frac{a}{4} + \frac{a}{12} = \frac{a}{3}$. O mesmo teria acontecido se eu tivesse permanecido imóvel no mesmo lugar, já que, no fim de contas, eu voltaria para trás. Assim, se eu não tivesse andado, num minuto (e não em dois) o bonde se aproximaria de mim $\frac{a}{4} : 2 = \frac{a}{6}$, e a distância a seria percorrida por ele em 6 minutos. Por isso, para um observador imóvel, os bondes passavam com intervalos de 6 minutos.

O barco e a jangada

Problema

Um barco a motor leva (sem parar) 5 horas para descer o rio desde a cidade A até a cidade B . Na volta, avança contra a corrente (na sua marcha normal e também sem parar) durante 7 horas. Quantas horas necessitará uma jangada para ir da cidade A à cidade B , seguindo à velocidade da corrente?

Solução

Designemos por x o tempo (em horas) que o barco a motor necessitaria para percorrer a distância que separa A de B com a *água parada* (isto é, considerando apenas a velocidade do barco) e por y o tempo que a jangada gasta

para percorrer a mesma distância. Assim sendo,— numa hora o barco percorre $\frac{1}{x}$ da distância AB e a jangada (cuja velocidade é a impulsionada pela corrente) $\frac{1}{y}$ desta distância. Por isso o barco a motor percorre numa hora $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ quando desce o rio e $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ quando o sobe (contra a corrente). Das condições do problema sabemos que para baixo o barco a motor percorre numa hora $\frac{1}{5}$ da distância e para cima $\frac{1}{7}$. Obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Notemos que para resolver este sistema não é necessário eliminar os denominadores. Basta subtrair a segunda equação da primeira, obtendo-se:

$$\frac{2}{y} = \frac{2}{35},$$

ou seja, $y = 35$. A jangada se deslocará de A a B em 35 horas.

Duas latas de café

Problema

Duas latas cheias de café têm a mesma forma e são feitas do mesmo material. A primeira pesa 2 kg e tem 12 cm de altura e a segun-

da pesa 1 kg e mede 9,5 cm de altura. Qual é o peso líquido do café em cada uma das latas?

Solução

Designemos o peso do conteúdo da lata maior por x e o da lata menor por y . Os pesos das latas serão designados, respectivamente, por z e t . Temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y + t = 1. \end{cases}$$

Tendo em conta que os pesos do conteúdo de ambas as latas cheias estão entre si como os respectivos *volumes**, isto é, como os cubos das respectivas alturas, resulta que

$$\frac{x}{y} = \frac{12^3}{9,5^3} \approx 2,02 \quad \text{ou} \quad x = 2,02y.$$

Os pesos das latas vazias estão entre si como as áreas das respectivas *superfícies* totais, isto é, como os quadros das suas alturas. Por isso

$$\frac{z}{t} = \frac{12^2}{9,5^2} \approx 1,60 \quad \text{ou} \quad z = 1,60t.$$

Substituindo os valores de x e z na primeira equação, obteremos o sistema:

$$\begin{cases} 2,02y + 1,60t = 2, \\ y + (\leftrightarrow) t = 1. \end{cases}$$

* Esta proporção apenas se pode aplicar no caso de as paredes das latas não serem muito grossas, pois se não for assim, as superfícies interna e externa não serão iguais, e a altura da sua parte interna diferirá um pouco da altura externa da lata.

Temos a equação

$$x + (6 + x) = 20,$$

ou seja,

$$x = 7.$$

Portando, o número de rapazes era de
 $20 - 7 = 13$.

Exploração marinha

Problema 1

O navio de reconhecimento que navegava com o resto da esquadra recebeu a missão de explorar o mar numa zona de 70 milhas na direção em que a esquadra navegava. A velocidade desta era de 35 milhas por hora e a do navio de reconhecimento de 70 milhas por hora. Quanto tempo levará este navio para se incorporar novamente na esquadra?

Solução

Designemos o número de horas que pretendemos saber por x . Durante este tempo a esquadra percorreu $35x$ milhas e o navio de reconhecimento, $70x$. Este último navegou sozinho 70 milhas e uma parte desta distância no regresso, sendo a outra parte percorrida pela esquadra. Em conjunto percorreram $70x + 35x$, o que corresponde a $2 \cdot 70$ milhas.

Daqui escrevemos a equação;

$$70x + 35x = 140$$

e, portanto,

$$x = \frac{140}{105} = 1 \frac{1}{3}$$

horas. O navio de reconhecimento retorna à esquadra ao fim de 1 hora e 20 minutos.

Problema 2

O navio de reconhecimento recebeu ordem de fazer um reconhecimento na direção em que a esquadra avançava, devendo integrar-se a esta três horas depois. Ao fim de quanto tempo, a partir do momento em que se distancia da esquadra, deve o navio de reconhecimento começar a voltar, se a sua velocidade for de 60 nós e a da esquadra de 40 nós?

Solução

Suponhamos que o navio de reconhecimento deveria regressar ao fim de x horas. Isto significa que se foi afastando da esquadra durante x horas e que, na volta, gastou $3 - x$ horas para se juntar a ela. Enquanto todos os navios seguiam na mesma direção, em x horas o navio de reconhecimento distanciou-se da esquadra até um máximo correspondente à diferença entre as distâncias percorridas por cada um deles, isto é, igual a

$$60x - 40x = 20x.$$

No regresso, o navio de reconhecimento percorreu em direção à esquadra uma distância igual a $60(3 - x)$, enquanto que a esqua-

dra percorreu $40(3 - x)$. Um e outra percorreram em conjunto $10x$. Portanto,

$$60(3 - x) + 40(3 - x) = 20x.$$

Assim

$$x = 2\frac{1}{2}.$$

O navio de reconhecimento devia modificar o rumo, iniciando o regresso 2 horas e 30 min depois de ter abandonado a esquadra.

No velódromo

Problema

Dois ciclistas correm num velódromo com velocidades constantes. Seguindo em direções opostas, encontram-se de 10 em 10 segundos e correndo na mesma direção, um dos ciclistas alcança o outro de 170 em 170 segundos. Qual é a velocidade de cada um dos ciclistas se o comprimento da pista for de 170 m?

Solução

Se a velocidade do primeiro ciclista é x , em 10 segundos ele percorre $10x$ metros. O segundo, que vai ao encontro do primeiro, percorre o resto da pista no intervalo que medeia entre dois cruzamentos, isto é, percorre $170 - 10x$ metros. Se a velocidade do segundo for y , esta distância é igual a $10y$ metros.

Logo,

$$170 - 10x = 10y.$$

Se os ciclistas correm na mesma direção, em 170 segundos o primeiro percorre $170x$ metros e o segundo $170y$ metros. Se a velocidade do primeiro for superior à do segundo, entre dois encontros consecutivos percorre mais uma volta que o segundo, isto é,

$$170x - 170y = 170.$$

Simplificando estas equações, obtemos

$$x + y = 17 \quad \text{e} \quad x - y = 1$$

e portanto

$$x = 9, \quad y = 8 \quad (\text{metros por segundo}).$$

Corrida de motos

Problema

Numa corrida de motos, três delas partiram simultaneamente. A segunda percorre numa hora menos 15 km que a primeira e mais 3 km que a terceira e chega à meta 12 minutos depois da primeira e 3 minutos antes da terceira. Durante a corrida não houve paradas.

Pretende-se saber:

- a) a distância percorrida;
- b) a velocidade de cada moto;
- c) o tempo gasto por cada uma das motos.

Solução

Ainda que as incógnitas sejam sete, utilizaremos apenas duas para resolver o problema, formando um sistema de duas equações com duas incógnitas.

Designando a *velocidade* da segunda moto por x , a velocidade da primeira será $x + 15$ e a da terceira, $x - 3$.

A distância percorrida será designada por y . Neste caso o tempo gasto por cada uma das motos será:

para a primeira moto . . . $\frac{y}{x+15}$,

" a segunda " . . . $\frac{y}{x}$,

" a terceira " 1 $\frac{y}{x-3}$.

A segunda moto gastou mais 12 minutos ($\frac{1}{5}$ hora) que a primeira. Por isso

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5}.$$

A terceira gastou mais 3 minutos ($\frac{1}{20}$ de hora) que a segunda. Por conseguinte,

$$\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}.$$

Multiplicando por 4 esta equação e subtraindo-a, membro a membro, da anterior, obtemos:

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} - 4 \left(\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} \right) = 0.$$

Dividindo ambos os membros por y (visto que $y \neq 0$) e livrando-nos dos denominadores, obtemos:

$$(x + 15)(x - 3) - x(x - 3) - 4x(x + 15) + 4(x + 15)(x - 3) = 0.$$

Abrindo os parênteses e reduzindo os termos semelhantes, obtemos

$$3x - 225 = 0,$$

ou seja,

$$x = 75.$$

Conhecendo o valor de x , obtém-se o valor de y a partir da primeira equação:

$$\frac{y}{75} - \frac{y}{90} = \frac{1}{5},$$

isto é, $y = 90$.

Deste modo as velocidades das motos são: 90, 75 e 72 km por hora.

A distância percorrida é igual a 90 km.

Dividindo a distância pela velocidade de cada moto, obtemos o tempo gasto por cada uma delas:

a primeira . . . 1 hora,

a segunda . . . 1 hora e 12 minutos,

a terceira . . . 1 hora e 15 minutos.

E assim calculamos o valor das sete incógnitas.

Velocidade média

Problema

Um automóvel percorreu a distância entre duas cidades a uma velocidade de 60 km por hora e fez a viagem de volta a 40 km por hora. Qual foi a velocidade média feita nos dois trajetos?

Solução

A aparente simplicidade do problema confunde muita gente. Sem pensar cuidadosamente nele, determinam a média aritmética entre 60 e 40, isto é, a sua semi-soma:

$$\frac{60+40}{2}=50.$$

Esta solução “simples” seria correta se na ida e na volta se tivesse gasto o mesmo tempo. Mas é evidente que na volta (feita a uma velocidade menor) se gastou mais tempo que na ida. Tendo isto em conta, compreendemos que a resposta de 50 está errada.

Assim é de fato. A equação dá-nos outra solução. E não é difícil obter a equação se introduzirmos uma incógnita auxiliar: a distância entre as duas cidades, que designemos por l . Se x for a velocidade média procurada, podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{60} + \frac{l}{40}.$$

Sendo $l \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da equação por l

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$

e, portanto,

$$x = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = 48.$$

Deste modo, concluímos que a resposta certa não é 50, mas sim 48 km por hora.

Se resolvéssemos o mesmo problema literalmente (na ida o automóvel seguiu com uma velocidade de a km por hora e na volta com uma velocidade de b km por hora), obteríamos a equação:

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{a} + \frac{l}{b}$$

e, portanto, obteríamos para o valor de x :

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Esta fórmula representa a *média harmônica* das grandezas a e b .

Portanto, a velocidade média em todo o percurso expressa-se não por meio da média aritmética, mas sim pela média harmônica das velocidades. Para valores de a e b positivos, a média harmônica das velocidades será sem-

pre menor que a média aritmética

$$\frac{a+b}{2},$$

como se verificou no exemplo numérico (48 é menor que 50).

Máquinas para calcular rapidamente

Ao tratar das equações no âmbito da *Álgebra Recreativa*, não podemos esquecer-nos da solução de equações através de máquinas de calcular. Já se disse que calculadoras podem “jogar” xadrez (ou damas) e, além destas, realizar outras funções como, por exemplo, traduzir, orquestrar melodias, etc. Basta para tal elaborar o “programa” correspondente, de acordo com o qual a máquina atuará.

É evidente que não vamos examinar aqui “programas” para xadrez ou para traduções, que são extremamente difíceis. Examinaremos apenas dois “programas” simples. Mas antes disso devemos dizer algo sobre a construção de uma máquina de calcular.

No primeiro capítulo tratamos dos dispositivos que permitem fazer muitos milhares de operações por segundo. A parte da máquina que serve para a execução direta de operações chama-se *unidade aritmética*. Além desta, a máquina tem uma *unidade de controle* (que regula todo o trabalho da máquina) e a *memória*. A memória é um dispositivo onde são gravados números e sinais convencionais. Finalmente, a máquina é equipada com disposi-

tivos de entrada e de saída destinados a introduzir novos dados numéricos e a fornecer os resultados definitivos. A máquina registra esses resultados (já no sistema decimal) em cartões especiais.

É evidente que o som pode ser registrado em discos ou em fitas magnéticas e depois reproduzido. Mas a gravação do som em disco só pode ser feita uma vez, isto é, para efetuar uma nova gravação é necessário um novo disco. A gravação em fita magnética efetua-se de uma forma um tanto diferente, magnetizando uma fita especial. O som registrado pode ser reproduzido o número de vezes que seja necessário, e se o registro se tornar desnecessário, pode-se “apagá-lo” e realizar na mesma fita uma nova gravação. Uma mesma fita magnética pode ser gravada várias vezes, com a particularidade de cada nova gravação “apagar” a anterior.

O funcionamento da memória baseia-se num princípio análogo. Os números e os sinais convencionais registram-se elétrica, magnética ou mecanicamente num tambor, numa fita magnética ou num outro dispositivo. O número gravado pode ser “lido” em momento oportuno e, se não for mais necessário, pode ser apagado gravando outro em seu lugar. A “memorização” e a “leitura” de um número ou de um sinal convencional dura apenas alguns milionésimos de segundo.

A memória pode ser constituída por alguns milhares de *células* e cada célula é formada por várias dezenas de elementos magnéticos, por exemplo. Convencionemos que, para registrar

os números por meio do sistema de base dois, cada elemento magnetizado designa o algarismo 1 e os não magnetizados o 0. Suponhamos, por exemplo, que cada célula retentora contém 25 elementos (ou, como se diz, 25 ordens do sistema de base dois), servindo o primeiro elemento da célula para designar o *sinal* do número (+ ou —), os 14 seguintes para gravar a parte inteira do número e os últimos 10 para registrar a parte decimal. Na figura 11 apresentam-se esquematicamente duas células de memória com 25 elementos cada uma, designando-se os que estiverem magnetizados com o sinal + e os desmagnetizados com o sinal —. Examinemos a célula superior (a vírgula indica o lugar onde começa a parte decimal e a linha tracejada separa o primeiro elemento que serve para fixar o sinal) dos restantes). Nessa célula está escrito no sistema de base dois o número +1001,01, que equivale no sistema decimal, a que estamos acostumados, ao número 11,25.

Além dos números, nas células retentoras registram-se as *ordens* que compõem o “programa”. Vejamos em que consiste o sistema de ordens de *três endereços*. Neste caso, ao receber a ordem, a célula retentora divide-se em quatro partes (as linhas tracejadas da célula inferior, fig. 9). A primeira parte serve para indicar o sinal da operação, que está em código. Por exemplo:

adição	— operação 1,
subtração	— operação 2,
multiplicação	— operação 3, etc.

Programa 1

- | | | | | |
|----|---------------|---|---|---|
| 1) | adição | 4 | 5 | 4 |
| 2) | multiplicação | 4 | 4 | → |
| 3) | OD * | | 1 | |
| 4) | 0 | | | |
| 5) | 1 | | | |

Vejamos como funciona uma máquina em cujas cinco primeiras células estão gravados estes dados:

1.^a ordem: adicionar os números das células 4 e 5 e enviar o resultado novamente para a célula 4 (em substituição do que lá figurava anteriormente). Por conseguinte, a máquina grava na célula 4 o número $0 + 1 = 1$. Depois de cumprida a primeira ordem, nas células 4 e 5 encontram-se os seguintes números:

- 4) 1,
5) 1.

2.^a ordem: multiplicar o número da célula 4 por si próprio (isto é, elevá-lo ao quadrado) e registrar o resultado no cartão, isto é, 1^2 (a seta significa a saída do resultado definitivo).

3.^a ordem: *operação de direção* à célula 1. Em outras palavras: a ordem OD significa a repetição de todas as ordens começando pela primeira. Então executa-se novamente a primeira ordem.

1.^a ordem: adicionar os números das células 4 e 5 e registrar a soma novamente na

* Operação de direção.

célula 4. Por conseguinte, na célula 4 estará o número $1 + 1 = 2$:

4) 2,

5) 1.

2.^a ordem: elevar ao quadrado o número da célula 4 e registrar o resultado, 2^2 , no cartão.

3.^a ordem: *operação de direção* à célula 1 (isto é, voltar novamente à primeira ordem).

1.^a ordem: efetuar $2 + 1 = 3$ e enviar este último número para a célula 4:

4) 3,

5) 1.

2.^a ordem: registrar no cartão o valor de 3^2 .

3.^a ordem: *operação de direção* à célula 1, etc.

Vimos como a máquina calcula sucessivamente os *quadrados dos números inteiros* e os registra no cartão. Note-se que não é necessário marcar de cada vez um novo número: a própria máquina marca os inteiros uns a seguir aos outros e os eleva ao quadrado. Atuando de acordo com este programa, a máquina fornece-nos o quadrado de todos os números inteiros de 1 a 10 000 em alguns segundos (ou mesmo frações de segundo).

Deve ser acentuado que, na realidade, o programa para o cálculo dos quadrados dos números inteiros é um pouco mais complicado do que o mencionado anteriormente. E isto se deve sobretudo à 2.^a ordem. É que registrar o resultado no cartão requer muito mais tempo que o que a máquina precisa para efetuar uma

operação. Por isso os resultados são gravados primeiro em células livres da memória e só depois (“sem precipitações”) são registrados no cartão. Deste modo, o primeiro resultado definitivo é gravado na primeira célula da memória que se encontra livre, o segundo na 2.^a, o terceiro na 3.^a, etc. No programa simplificado, exposto anteriormente, tudo isto foi omitido.

Acrescente-se ainda que a máquina não pode dedicar-se durante muito tempo ao cálculo de quadrados, pois não chegariam as células da memória e é impossível “adivinhar” quando a máquina obteve os quadrados de que necessitamos, a fim de desligá-la (já que a máquina executa muitos milhares de operações por segundo!). Por este motivo estão previstas ordens especiais para fazer parar a máquina no momento oportuno. Por exemplo, o programa pode ser feito de tal modo que a máquina calcule os quadrados de todos os números inteiros de 1 a 10 000, após o que pára automaticamente. Há também um outro tipo de ordens mais complicadas, as quais não veremos no nosso livro.

Eis o aspecto que tem o programa para o cálculo dos quadrados de 1 a 10 000:

Programa 1a

1) adição	8	9	8
2) multiplicação	8	8	10
3) adição	2	6	2
4) OC *	8	7	1

- 5) stop
- 6) 0 0 1
- 7) 10 000
- 8) 0
- 9) 1
- 10) 0
- 11) 0
- 12) 0
-

As duas primeiras ordens diferenciam-se muito pouco das que expusemos no programa simplificado. Depois de cumprir estas duas ordens, nas células 8, 9, 10 teremos os seguintes números:

- 8) 1
- 9) 1
- 10) 1^2

A terceira ordem é muito interessante: manda adicionar o número gravado nas células 2 e 6 e gravar o resultado na célula 2, a qual apresentará depois o seguinte aspecto:

2) multiplicação 8 8 11.

Daqui se conclui que, depois de cumprir a terceira ordem, a *segunda ordem muda*, ou melhor, muda um dos *endereços* da segunda ordem. A seguir esclareceremos as razões deste fato.

A quarta é a operação de comparação (em substituição da terceira ordem do programa

* OC — operação de comparação.

examinado anteriormente). Ela executa-se assim: se o número gravado na célula 8 é *menor* que o da 7, a operação de direção transmite-se à célula 1. Em caso contrário, efetua-se a ordem seguinte (a 5.^a). No caso presente como $1 < 10\ 000$, a operação de direção é transmitida à célula 1. Portanto, volta-se à primeira ordem.

Uma vez cumprida esta, na célula 8 se encontrará o número 2.

A segunda ordem será

2) multiplicação 8 8 11,

que consiste em enviar o número 2^2 para a célula 11. Fica agora claro porque se executou anteriormente a terceira ordem: o 2^2 não pode ir para a célula 10, que já está ocupada, mas sim para a seguinte.

Uma vez executadas a primeira e a segunda ordens teremos os seguintes números:

8) 2

9) 1

10) 1^2

11) 2^2

Depois de executada a terceira ordem, a célula aparecerá assim:

2) multiplicação 8 8 12,

isto é, a máquina “se preparou” para gravar o novo resultado na célula seguinte, a 12.^a. Como na célula 8 continua estando um número menor que na 9, a quarta ordem significa que a operação de direção é transmitida novamente à célula 1.

Assim, cumpridas a primeira e a segunda ordens, obteremos:

- 8) 3
- 9) 1
- 10) 1^2
- 11) 2^2
- 12) 3^2

Até quando continuará a máquina calculando os quadrados de acordo com o programa? Até que na célula 8 apareça o número 10 000,

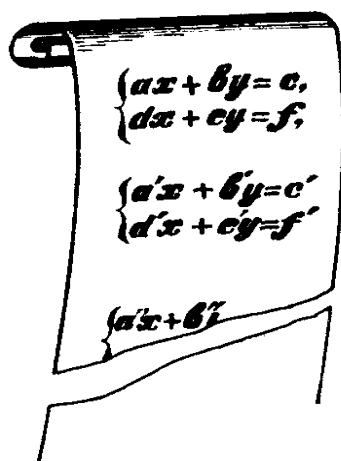


Fig. 10

isto é, enquanto não forem obtidos os quadrados dos números compreendidos entre 1 e 10 000. Depois a quarta ordem já não transmite a operação de direção à célula 1 (porque na célula 8 não estará um número *menor* mas sim igual ao gravado na célula 7), isto é,

depois da quarta ordem, a máquina cumpre a quinta ordem: cessa de funcionar (desliga-se).

Examinemos agora um processo mais complicado de programação para resolver sistemas de equações. Veremos um programa simplificado, podendo depois imaginar-se o aspecto do programa completo.

Suponhamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Este sistema é de fácil solução:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad \text{e} \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Este sistema (com valores numéricos de a, b, c, d, e e f) podia ser resolvido em menos de um minuto. A máquina, porém, pode dar num segundo a solução de *milhares* de tais sistemas de equações.

Examinemos o programa correspondente. Suponhamos que foram dados simultaneamente vários sistemas com valores numéricos dos coeficientes $a, b, c, d, e, f, a', b', \dots$

Eis o programa correspondente:

Programa 2

1)	×28	30	20	6)	×28	29	25
2)	×27	31	21	7)	—20	21	20
3)	×26	30	22	8)	—22	23	21
4)	×27	29	23	9)	—24	25	22
5)	×26	31	24	10)	: 20	21	

11)	:	22	21		26)	a	
12)		+1	19	1	27)	b	
13)		+2	19	2	28)	c	
14)		+3	19	3	29)	d	
15)		+4	19	4	30)	e	
16)		+5	19	5	31)	f	
17)		+6	19	6	32)	a'	
18)	OD			1	33)	b'	
19)		6	6	0	34)	c'	
20)		0			35)	d'	
21)	0				36)	e'	
22)	0				37)	f'	
23)	0				38)	a''	
24)	0				.	.	.
25)	0						

1.^a ordem: efetuar a multiplicação dos números gravados nas células 28 e 30 e enviar o resultado para a célula 20, ou em outras palavras, na célula 20 se gravará o número ce .

Do mesmo modo se realizariam as ordens seguintes até a 6.^a. Depois de executadas, nas células 20 a 25 se encontrariam os seguintes números:

20)	ce
21)	bf
22)	ae
23)	bd
24)	af
25)	cd

7.^a ordem: do número da célula 20, subtrair o da célula 21 e gravar o resultado (isto é, $ce - bf$) novamente na célula 20.

A 8.^a e a 9.^a ordens são análogas. Portanto, nas células 20, 21 e 22 aparecem os seguintes números:

$$20) \quad ce - bf$$

$$21) \quad ae - bd$$

$$22) \quad af - cd$$

A 10.^a e a 11.^a ordens formam as seguintes frações:

$$\frac{ce - bf}{ae - bd} \quad \text{e} \quad \frac{af - cd}{ae - bd}$$

que se registram no cartão, isto é, são resultados definitivos). São estes os valores das incógnitas do primeiro sistema de equações.

Assim, o primeiro sistema está resolvido. Por que motivo são necessárias novas ordens? A parte seguinte do programa (desde a célula 12 até a 19) destina-se a obrigar a máquina a “passar” para o segundo sistema de equações. Vejamos como isso se processa. As ordens desde a 12.^a até a 17.^a servem para se juntar aos números contidos nas células 1 a 6 o que está gravado na célula 19 e os resultados são gravados outra vez nas células 1 a 6. Assim, depois de cumprida a 17.^a ordem, as primeiras seis células terão o seguinte conteúdo:

$$1) \quad \times 34 \quad 36 \quad 20$$

$$2) \quad \times 33 \quad 37 \quad 21$$

$$3) \quad \times 32 \quad 36 \quad 22$$

$$4) \quad \times 33 \quad 35 \quad 23$$

- 5) $\times 32$ 37 24
 6) $\times 34$ 35 25

18.^a ordem: operação de direção à primeira célula.

Em que se diferenciam as novas indicações das seis primeiras células das que elas possuíam anteriormente? No fato de que os dois primeiros endereços nestas células têm os números 32 a 37 e não os 26 a 31, como antes. Em outras palavras, a máquina realizará de novo as mesmas operações, mas os números não serão já os das células 26 a 31, mas sim os das células 32 a 37, que contêm os coeficientes do segundo sistema de equações. Depois de resolver este, a máquina passa ao terceiro, etc.

O que se disse basta para evidenciar a importância de programar adequadamente. A máquina “por si” não “sabe” fazer nada. Apenas cumpre o programa que se lhe forneça. Há programas para calcular raízes, logaritmos e senos, para resolver equações de graus superiores, etc. Já se indicou que existem programas para jogar xadrez, para a tradução de um idioma para outro, etc. É evidente que quanto mais difícil for o problema a ser resolvido, tanto mais complexo será o programa correspondente.

Acrescentaremos, para finalizar, que existe a *programação de programas*, isto é, programas que permitem à máquina compor um programa para resolver um problema. Isto facilita em alto grau a programação, que é frequentemente bastante trabalhosa.

Capítulo III

Em ajuda da aritmética

$$\left(\left((5^2)^2 \right)^2 \right)^2$$

A aritmética é frequentemente incapaz de demonstrar categoricamente, com os seus próprios meios, a veracidade de algumas das suas afirmações. Em tais casos tem-se que recorrer aos métodos sintetizadores da álgebra. A este gênero de teses aritméticas, fundamentadas na álgebra, pertencem, por exemplo, muitas das regras usadas nas operações abreviadas, as curiosas propriedades de alguns números, os critérios ou caracteres da divisibilidade, etc. Neste capítulo vamos dedicar-nos ao exame de questões deste tipo.

Multiplicação abreviada

Os “craques” em cálculo frequentemente tornam mais fáceis as operações mediante transformações algébricas pouco complexas. Por exemplo, a operação: 988^2 efetua-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 988 \cdot 988 &= (988 + 12) \cdot (988 - 12) + 12^2 = \\ &= 1000 \cdot 976 + 144 = 976\,144. \end{aligned}$$

É fácil entender que neste caso se recorre à seguinte transformação algébrica:

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + b^2.$$

Na prática podemos aplicar esta fórmula para cálculos mentais. Por exemplo:

$$27^2 = (27 + 3)(27 - 3) + 3^2 = 729,$$

$$63^2 = 66 \cdot 60 + 3^2 = 3\,969,$$

$$18^2 = 20 \cdot 16 + 2^2 = 324,$$

$$37^2 = 40 \cdot 34 + 3^2 = 1\,369,$$

$$48^2 = 50 \cdot 46 + 2^2 = 2\,304,$$

$$54^2 = 58 \cdot 50 + 4^2 = 2\,916.$$

A multiplicação $986 \cdot 997$ realiza-se assim:

$$986 \cdot 997 = (986 - 3) \cdot 1000 + 3 \cdot 14 = 983\,042.$$

Em que se baseia este método? Suponhamos que os fatores têm a forma:

$$(1000 - 14) \cdot (1000 - 3)$$

e multipliquemos estes fatores segundo as regras da álgebra

$$1000 \cdot 1000 - 1000 \cdot 14 - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3.$$

A seguir efetuamos as seguintes transformações:

$$1000(1000 - 14) - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 =$$

$$= 1000 \cdot 986 - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 =$$

$$= 1000(986 - 3) + 14 \cdot 3.$$

A última linha é que expressa o método usado em tal cálculo.

É interessante o processo usado para multiplicar dois números de três algarismos quan-

do o algarismo das dezenas é o mesmo e a soma das unidades dos dois números é 10. Por exemplo, a multiplicação

$$783 \cdot 787$$

será efetuada do seguinte modo:

$$78 \cdot 79 = 6162; \quad 3 \cdot 7 = 21;$$

e o resultado é

$$616 \ 221.$$

Este método deduz-se das seguintes transformações:

$$\begin{aligned} (780 + 3) (780 + 7) &= \\ &= 780 \cdot 780 + 780 \cdot 3 + 780 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = \\ &= 780 \cdot 780 + 780 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = \\ &= 780 (780 + 10) + 3 \cdot 7 = \\ &= 780 \cdot 790 + 21 = 616 \ 200 + 21. \end{aligned}$$

Existe outro meio, ainda mais simples, para realizar multiplicações análogas:

$$\begin{aligned} 783 \cdot 787 &= (785 - 2) (785 + 2) = \\ &= 785^2 - 4 = 616 \ 225 - 4 = 616 \ 221. \end{aligned}$$

Neste exemplo tivemos que elevar ao quadrado o número 785.

Para elevar rapidamente ao quadrado um número terminado em 5, é muito cômodo o seguinte método:

$$35^2; \quad 3 \cdot 4 = 12. \quad \text{Resultado: } 1225.$$

$$65^2; \quad 6 \cdot 7 = 42. \quad \text{Resultado: } 4225.$$

$$75^2; \quad 7 \cdot 8 = 56. \quad \text{Resultado: } 5625.$$

Efetua-se a operação multiplicando o algarismo das dezenas pelo algarismo que o supera numa unidade e escrevendo 25 a seguir ao produto obtido.

O método baseia-se no seguinte: se o algarismo das dezenas for a , qualquer número deste tipo pode ser expresso por

$$10a + 5.$$

O quadrado deste número, como quadrado de um binômio, será igual a

$$100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25.$$

A expressão $a(a + 1)$ é o produto do algarismo das dezenas por ele mesmo aumentado de uma unidade. Multiplicar um número por 100 e juntar-lhe 25 é o mesmo que *escrever* 25 à direita do produto. Deste mesmo método se deduz um processo simples para elevar ao quadrado números mistos em que a parte fracionária é $\frac{1}{2}$. Por exemplo:

$$\left(3 \frac{1}{2}\right)^2 = 3,5^2 = 12,25 = 12 \frac{1}{4},$$

$$\left(7 \frac{1}{2}\right)^2 = 56 \frac{1}{4},$$

$$\left(8 \frac{1}{2}\right)^2 = 72 \frac{1}{4}, \text{ etc.}$$

Os algarismos 1, 5 e 6

Quem ainda não verificou que, ao multiplicar entre si uma série de números terminados em um ou cinco, o produto termina com o mesmo algarismo? Sem dúvida que

será menos conhecido o fato de o que se disse ser aplicável também ao 6. Por esta razão, entre outras, a potência de qualquer número terminado em 6 termina também em 6.

Por exemplo, $46^2 = 2\ 116$; $46^3 = 97\ 336$.

Esta curiosa propriedade dos algarismos 1, 5 e 6 pode ser fundamentada por via algébrica. Examinemo-la no caso do seis.

Qualquer número terminado em seis pode ser escrito sob a forma:

$$10a + 6, \quad 10b + 6, \quad \dots$$

onde a e b são números inteiros.

A multiplicação de dois números inteiros como estes é igual a

$$\begin{aligned} 100ab + 60b + 60a + 36 &= \\ &= 10(10ab + 6b + 6a) + 30 + 6 = \\ &= 10(10ab + 6b + 6a + 3) + 6. \end{aligned}$$

O resultado deve, portanto, constar de algumas dezenas e do algarismo 6 nas unidades, o qual, evidentemente, deve reaparecer no final.

Este método de demonstração pode ser usado para o caso do 1 e do 5.

O exposto permite afirmar que, por exemplo:

386^{2567} termina em 6,

815^{723} termina em 5,

491^{1732} termina em 1, etc.

Os números 25 e 76

Há números de dois algarismos que também têm a propriedade dos algarismos 1, 5 e 6; referimo-nos aos números 25 e — surpreendentemente — 76. O produto de dois números terminados em 76 acaba também em 76.

Vamos demonstrá-lo. A expressão comum de tais números é a seguinte:

$$100a + 76, \quad 100b + 76, \quad \dots$$

Multipliquemos dois números desse tipo entre si e obteremos:

$$\begin{aligned} 10\,000ab + 7600b + 7600a + 5776 &= \\ = 10\,000ab + 7600b + 7600a + 5700 + 76 &= \\ = 100(100ab + 76b + 76a + 57) + 76. \end{aligned}$$

A propriedade está demonstrada: o resultado terminará em 76.

Daqui se conclui que qualquer *potência* de um número terminado em 76 termina no mesmo número:

$$376^2 = 141\,376, \quad 576^3 = 191\,102\,976, \quad \dots$$

“Números” infinitos

Existem ainda grupos de números de mais de dois algarismos que, figurando na parte final deles, se conservam na sua multiplicação. O número de tais grupos é infinito.

Conhecemos já dois grupos formados por dois algarismos que possuem essa propriedade: o 25 e o 76. Para encontrar grupos semelhantes

com 3 algarismos, temos que *colocar antes* do 25 ou do 76 um algarismo tal que forme com eles um grupo de três algarismos com a mesma propriedade.

Que algarismo se deve colocar antes de 76? Designemo-lo por k . Nesse caso o número de três algarismos será:

$$100k + 76.$$

A expressão comum de qualquer número que termine neste grupo de três algarismos será:

$$1000a + 100k + 76, 1000b + 100k + 76, \dots$$

Multiplicando dois números deste tipo entre si, teremos:

$$\begin{aligned} &1\ 000\ 000ab + 100\ 000ak + 100\ 000bk + \\ &+ 76\ 000a + 76\ 000b + 10\ 000k^2 + \\ &+ 15\ 200k + 5776. \end{aligned}$$

Todas as parcelas, exceto as duas últimas, terminam em três zeros pelo menos. Por isso o resultado acaba em $100k + 76$ se a diferença

$$\begin{aligned} &15\ 200k + 5776 - (100k + 76) = \\ &= 15\ 100k + 5700 = 15\ 000k + 5000 + \\ &+ 100(k + 7) \end{aligned}$$

for divisível por 1000. Isto acontecerá, evidentemente, quando k for igual a 3.

Por conseguinte, o grupo de três algarismos procurado é 376. A este fato se deve que toda a potência de 376 termina em tal número. Por exemplo,

$$376^2 = 141\ 376.$$

Se nos interessar determinar um grupo de quatro algarismos que tenha a mesma propriedade, devemos colocar antes de 376 mais um algarismo. Se designarmos esse algarismo por l , chegaremos ao seguinte problema: qual deve ser o valor do algarismo l para que a multiplicação:

$$(10\ 000a + 1000l + 376) (10\ 000b + 1000l + 376)$$

termine em $1000l + 376$? Se abrirmos os parênteses desta multiplicação e desprezarmos todas as parcelas com fatores terminados em quatro ou mais zeros, restará

$$752\ 000l + 141\ 376.$$

O produto termina em $1000l + 376$ se a diferença

$$\begin{aligned} 752\ 000l + 141\ 376 - (1000l + 376) &= \\ = 751\ 000l + 141\ 000 &= \\ = (750\ 000l + 140\ 000) + 1000(l + 1) \end{aligned}$$

for divisível por 10 000. Obviamente, isto terá lugar somente quando l for igual a 9.

O grupo de quatro algarismos procurado será 9 376.

Ao grupo obtido pode-se acrescentar mais um algarismo, para o que devemos seguir um raciocínio idêntico. Obteríamos 09 376. Continuando, chegaríamos a 109 376, depois a 7 109 376, etc.

Este acrescentar de algarismos à esquerda do número pode ser efetuado um número infinito de vezes. Como resultado, obteríamos um

“número” com uma *infinitude* de algarismos:
 . . . 7 109 376.

Tais “números” podem ser adicionados e multiplicados de acordo com as regras comuns: como sabemos, é *da direita para a esquerda* que se adicionam e multiplicam os números em “coluna”. Por isso na adição e na multiplicação de dois números se pode operar sucessivamente com todos os algarismos que se quiser.

E o interessante, por mais incrível que pareça, é que este “número” infinito satisfaz à equação

$$x^2 = x.$$

Vejamos que assim é, realmente. O quadrado deste “número” (isto é, o resultado da multiplicação por si mesmo) termina em 76, uma vez que ambos os fatores terminam em 76. Pela mesma razão, o quadrado do “número” escrito acaba em 376, em 9376, etc. Isto significa que, efetuando sucessivamente este raciocínio, chegaremos ao “número” $x = . . . = . . . 7\ 109\ 376$ e, portanto, x^2 terá os mesmos algarismos que x , isto é, $x^2 = x$.

Examinamos grupos de algarismos terminados em 76*. Se aplicarmos o mesmo racio-

* Notemos que o grupo de dois algarismos 76 pode ser determinado por um raciocínio análogo aos efetuados anteriormente. Basta resolver o problema do algarismo que deve anteceder o 6 para se obter um grupo de dois algarismos que tenha a propriedade assinalada. Por isso, o “número” ... 7 109 376 pode ser obtido antepondo sucessivamente algarismos ao 6.

cínio para grupos de algarismos terminados em 5, obteremos os seguintes grupos:

5, 25, 625, 0625, 90 625, 890 625,

2 890 625, . . .

Portanto, podemos escrever outro “número” infinito

. . . 2 890 625

que também satisfaz à equação $x^2 = x$.

Poderíamos demonstrar que este “número” infinito é “igual” a

$$(((5^2)^2)^2)^2 \dots$$

O interessante resultado obtido formula-se do seguinte modo, na linguagem dos números infinitos: a equação $x^2 = x$ tem (além de $x = 0$ e $x = 1$) duas raízes “infinitas”:

$x = \dots 7\ 109\ 376$ e $x = \dots 2\ 890\ 625$,

não possuindo mais nenhuma outra solução (no sistema de base 10)*.

A compensação

Um problema antigo

Em tempos muito remotos aconteceu o seguinte fato:

Dois mercadores venderam uma manada de bois, recebendo por cada animal tantos rublos,

* Os “números” infinitos podem ser examinados não só no sistema de base 10, mas também em outros sistemas de numeração. Estes “números” estudados no sistema de base p chamam-se *números de base p* .

quantos os bois da manada. Com o dinheiro obtido, compraram um rebanho de ovelhas, pagando 10 rublos por cada ovelha, e um cordeirinho. Ao repartirem o rebanho por igual, um recebeu mais uma ovelha e o outro o cordeirinho. O que recebeu este foi compensado pelo seu sócio. Sendo tal compensação um número inteiro de rublos, quanto foi?

Solução

Este problema não pode ser traduzido diretamente para a “linguagem algébrica”, pois não é possível compor a equação necessária. Tem que ser resolvido mediante um processo especial que chamamos raciocínio matemático livre. Mas também neste caso a álgebra presta à aritmética uma boa ajuda.

O valor em rublos de todo o rebanho é um quadrado exato, visto que tal rebanho foi adquirido com o dinheiro recebido da venda de n bois a n rublos por cabeça. Um dos sócios recebeu uma ovelha a mais e, portanto, o número de ovelhas é ímpar. Também é ímpar, pela mesma razão, o número de dezenas de n^2 . Qual é o algarismo das unidades?

Podemos demonstrar que se num quadrado exato o algarismo das dezenas é ímpar, o das unidades só pode ser 6.

De fato, o quadrado de qualquer número de a dezenas e b unidades, isto é, $(10a + b)^2$, é igual a

$$100a^2 + 20ab + b^2 = (10a^2 + 2ab) \cdot 10 + b^2.$$

O número de dezenas é, então, $10a^2 + 2ab$ acrescidas das que se possam retirar de b^2 . Mas $10a^2 + 2ab$ é divisível por 2, isto é, é um número par. Por isso o número de dezenas contidas em $(10a + b)^2$ será ímpar apenas se em b^2 houver um número ímpar de dezenas. Vejamos o que representa b^2 . É o quadrado do algarismo das unidades, isto é, um dos dez números seguintes:

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Destes, apenas 16 e 36 têm um número ímpar de *dezenas* e ambos terminam em 6. Isto significa que o quadrado exato

$$100a^2 + 20ab + b^2$$

só terá um número ímpar de dezenas se terminar em 6.

Agora já é fácil responder à pergunta formulada pelo problema. É evidente que o cordeirinho custou 6 rublos. O sócio a quem coube este recebeu assim 4 rublos menos que o outro. Para que a divisão seja equitativa, quem ficou com o cordeirinho deve ser compensado pelo sócio em 2 rublos.

Portanto, a compensação é de 2 rublos.

Divisibilidade por 11

A álgebra facilita, em grande medida, a procura de indícios que permitem concluir, sem efetuar a divisão, se um número é divisível por um ou outro divisor. A divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10 é bastante conhecida.

O caso da divisibilidade por 11 é muito simples e prático.

Suponhamos que num número de vários algarismos, N , o algarismo da direita é a , o das dezenas b , o das centenas c , o dos milhares d , etc., ou seja.

$$N = a + 10b + 100c + 1000d + \dots = \\ = a + 10(b + 10c + 100d + \dots),$$

onde as reticências indicam a soma das ordens seguintes. Subtraímos de N o número 11 ($b + 10c + 100d + \dots$), que é um múltiplo de 11. A diferença é igual a

$$a - b - 10(c + 10d + \dots),$$

que dará o mesmo resto que N quando for dividida por 11. Se a esta diferença adicionarmos 11 ($c + 10d + \dots$), múltiplo de 11, obteremos

$$a - b + c + 10(d + \dots),$$

que dividido por 11 dá o mesmo resto que N . Subtraímos dele o número 11 ($d + \dots$), múltiplo de 11, etc. Como resultado, obtemos o número $a - b + c - d + \dots = (a + c + \dots) - (b + d + \dots)$, que dividido por 11, dá o mesmo resto que N .

Daqui se conclui o seguinte critério de divisibilidade por 11: da soma dos algarismos de ordem ímpar subtraímos a soma dos algarismos de ordem par. Se a diferença for zero ou um múltiplo de onze (positivo ou negativo), o número será múltiplo de 11. Caso contrário, não será divisível por 11.

Vejamos, por exemplo, o número 87 635 064:

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25,$$

$$7 + 3 + 0 + 4 = 14,$$

$$25 - 14 = 11.$$

Logo, o número dado é divisível por 11.

Existe outro critério de divisibilidade por 11, cômodo para números relativamente pequenos. Consiste em separar o número dado em grupos de dois algarismos, da direita para a esquerda, e adicionar os números assim obtidos. Se a soma for divisível por 11, o número dado é múltiplo de 11 e, em caso contrário, não o é. Por exemplo, consideremos o número 528. Separamos o número em outros dois (5 e 28) e adicionamo-los:

$$5 + 28 = 33.$$

Como 33 se divide exatamente por 11, o número 528 é múltiplo de 11:

$$528 : 11 = 48.$$

Demonstremos este critério de divisibilidade. Dividamos em grupos de 2 algarismos do modo indicado o número N , que tem vários algarismos. Obteremos grupos de 2 (ou de 1*) algarismos, que designaremos, da direita para a esquerda, pelos números $a, b, c, \dots$, de

* Se o número N tiver um ímpar de algarismos, o último grupo (da esquerda) terá um só algarismo. Além disso, os grupos como 03 também devem ser considerados como de um só algarismo, como se se tratasse apenas do algarismo 3.

modo que o número N pode ser expresso do seguinte modo:

$$\begin{aligned} N &= a + 100b + 10\,000c + \dots = \\ &= a + 100(b + 100c + \dots). \end{aligned}$$

Subtraindo de N o número 99 ($b + 100c + \dots$), múltiplo de 11, obteremos

$$\begin{aligned} a + (b + 100c + \dots) &= \\ &= a + b + 100(c + \dots), \end{aligned}$$

que dará, ao ser dividido por 11, o mesmo resto que N . Deste número tiremos 99 ($c + \dots$), múltiplo de 11, etc. Assim se vê que o número N dividido por 11 dá o mesmo resto que o número

$$a + b + c + \dots$$

A placa do automóvel

Problema

Quando passeavam por uma cidade três estudantes de matemática, observaram que o motorista de um automóvel violou uma das regras de trânsito. Nenhum dos estudantes se recordava do número da placa (que tinha quatro algarismos), mas como eram matemáticos, cada um deles notou uma particularidade de tal número. Um deles notou que os dois primeiros algarismos eram iguais. O segundo re-

parou que também os dois últimos eram iguais. E, por último, o terceiro garantia que o número era um quadrado exato. É possível determinar o número da placa do automóvel usando apenas estes dados?

Solução

Designemos o primeiro (e o segundo) algarismo do número procurado por a e o terceiro (e quarto) por b . Então o número será igual a:

$$1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = \\ = 11 (100a + b).$$

Este número é divisível por 11 e, portanto (sendo um quadrado perfeito), também é divisível por 11^2 . Em outras palavras, $100a + b$ é também divisível por 11. Usando qualquer dos dois critérios de divisibilidade expostos, concluímos que o número $a + b$ é divisível por 11. Mas isto significa que

$$a + b = 11,$$

visto que cada um dos números a e b é menor que 10.

O último algarismo b , de um quadrado perfeito, pode ter os seguintes valores:

0, 1, 4, 5, 6, 9.

Por isso, para o algarismo a , que é igual a $11 - b$, temos os seguintes valores possíveis:

11, 10, 7, 6, 5, 2.

Os dois primeiros valores são inaceitáveis, ficando, portanto, os seguintes:

$$b = 4, \quad a = 7;$$

$$b = 5, \quad a = 6;$$

$$b = 6, \quad a = 5;$$

$$b = 9, \quad a = 2.$$

Concluimos que o número da placa deve ser algum destes:

7744, 6655, 5566, 2299.

Mas como os três últimos não são quadrados perfeitos — o número 6655 é divisível por 5, mas não por 25; 5566 divide-se por 2, mas não por 4, e 2299 (igual a $121 \cdot 19$) também não é quadrado perfeito — não nos resta senão o número 7744, quadrado de 88, que é a solução do problema.

Divisibilidade por 19

Vamos agora estudar o seguinte critério de divisibilidade por 19.

Um número é múltiplo de 19 apenas quando a soma das suas dezenas inteiras com o dobro das suas unidades for múltiplo de 19.

Solução

Qualquer número N pode ser representado por

$$N = 10x + y,$$

onde x é o *número* de dezenas (não o *algarismo* das dezenas mas sim quantas dezenas tem o

número) e y , o algarismo das unidades. Temos que demonstrar que N só é múltiplo de 19 se $N' = x + 2y$

for múltiplo de 19. Para isso, multipliquemos N' por 10 e façamos a subtração entre o produto obtido e N . Obteremos:

$$10N' - N = 10(x + 2y) - (10x + y) = 19y.$$

Com isto demonstramos que se N' é múltiplo de 19, também

$$N = 10N' - 19y$$

o será e, reciprocamente, se N é divisível por 19, também

$$10N' = N + 19y$$

é múltiplo de 19, o mesmo acontecendo com N' .

Suponhamos que necessitamos saber se 47 045 881 é divisível por 19.

Apliquemos sucessivamente o nosso critério de divisibilidade:

$$\begin{array}{r}
 4704588/1 \\
 + 2 \\
 \hline
 47045/90 \\
 + 18 \\
 \hline
 4706/3 \\
 + 6 \\
 \hline
 471/2 \\
 + 4 \\
 \hline
 47/5 \\
 + 10 \\
 \hline
 5/7 \\
 + 14 \\
 \hline
 19.
 \end{array}$$

Como 19 é divisor de 19, os números 57, 475, 4712, 47 063, 470 459, 4 704 590, 47 045 881 são múltiplos de 19.

Portanto, o número dado é divisível por 19.

Teorema de Sofia Germain

Damos a seguir um problema proposto por Sofia Germain, conhecida matemática francesa.

Demonstrar que os números do tipo $a^4 + 4$ são números compostos (com a condição de a não ser igual a 1).

Solução

A demonstração resulta das seguintes transformações:

$$\begin{aligned} a^4 + 4 &= a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = \\ &= (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = \\ &= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = \\ &= (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a). \end{aligned}$$

Daqui se conclui que o número $a^4 + 4$ pode ser expresso como um produto de dois fatores que não são iguais nem a si nem à unidade *, isto é, é um número composto.

* Isto é devido a:

$$\begin{aligned} a^2 + 2 - 2a &= (a^2 - 2a + 1) + 1 = \\ &= (a - 1)^2 + 1 \neq 1, \text{ se } \neq 1. \end{aligned}$$

Números compostos

Os números primos, isto é, os números maiores que 1 e que não têm outros divisores além da unidade e de si mesmos, são infinitos.

Começam em 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, . . . , e a sua série é interminável. Intercalados entre os números compostos, dividem os números naturais em séries mais ou menos prolongadas de números compostos. Qual é a extensão destas séries? Pode-se determinar alguma que abarque, por exemplo, mil números—compostos consecutivos?

Pode-se demonstrar, ainda que pareça inverossímil, que as séries de números compostos situados entre os primos podem ser de *qualquer extensão*. Não há limites para tais grupos de números, que podem ser formados por milhares, milhões, bilhões, etc., de números compostos.

Para maior facilidade, vamos utilizar o sinal convencional $n!$, para representar o produto de todos os números consecutivos de 1 a n inclusive. Por exemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Demonstremos que a série

$[(n + 1)! + 2], [(n + 1)! + 3],$

$[(n + 1)! + 4], \dots$

até o $[(n + 1)! + n + 1]$ inclusive

é formada por n números compostos consecutivos.

Estes números sucedem-se consecutivamente na série dos números naturais, visto que cada um deles é superior ao anterior numa

unidade. Resta-nos apenas demonstrar que todos eles são números compostos.

O primeiro

$$(n + 1)! + 2 = \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n + 1) + 2$$

é par, visto que ambas as suas parcelas contêm o fator 2. E qualquer número par maior que 2 é composto.

O segundo

$$(n + 1)! + 3 = \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n + 1) + 3$$

tem duas parcelas, das quais cada uma é um múltiplo de 3. Portanto, é também um número composto.

O terceiro

$$(n + 1)! + 4 = \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n + 1) + 4$$

é divisível por 4, já que é a soma de dois múltiplos de 4.

De modo análogo, concluiremos que o número

$$(n + 1)! + 5$$

é múltiplo de 5, etc. Em outras palavras, cada um destes números contém um divisor, além da unidade e dele próprio, isto é, é um número composto.

Se desejarmos obter cinco números compostos consecutivos basta substituir n por 5 na série anterior. Obteremos assim:

722, 723, 724, 725, 726.

Mas esta não é a única sequência de cinco números compostos consecutivos. Existem outras, por exemplo:

62, 63, 64, 65, 66.

Ou outra de termos ainda menores

24, 25, 26, 27, 28.

Tentemos agora resolver o seguinte problema:

Escrever *dez* números compostos consecutivos.

Solução

Em virtude do exposto, o primeiro dos dez números procurados pode ser

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 11 + 2 = 39\ 816\ 802.$$

Portanto, uma série de números que nos serve é 39 816 802, 39 816 803, 39 816 804, etc.

Contudo, existem séries de dez números compostos consecutivos consideravelmente menores. Inclusive podemos assinalar uma série, não de dez, mas de treze números consecutivos compreendidos entre a primeira e a segunda centena:

114, 115, 116, 117, etc., até o 126 inclusive.

Sobre os números primos

O fato de existir um número infinito de séries muito grandes de números *compostos* consecutivos pode levar a crer que a série

dos números *primos* é finita. Por isso não será demais demonstrar que a série dos números primos é infinita.

Esta demonstração deve-se ao matemático Euclides, da Grécia antiga, e figura nos seus célebres *Elementos*. Pertence à categoria das demonstrações por redução ao absurdo. Suponhamos que a série dos números primos é finita e representemos por N o seu último número. Desenvolvamos o fatorial de N :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot N = N!$$

Adicionando-lhe uma unidade, resultará $N! + 1$.

Este número, sendo inteiro, deve conter pelo menos um fator primo, isto é, deve ser divisível por um fator primo pelo menos. Mas qualquer dos números primos, de acordo com a hipótese, é igual ou inferior a N . Por outro lado, o número $N! + 1$ não é múltiplo de nenhum dos números inferiores ou igual a N , pois a sua divisão por qualquer deles dá resto 1.

Logo, não se pode aceitar a hipótese da série dos números primos ser finita, já que tal hipótese conduz a um absurdo. Por conseguinte, por maior que seja a série de números compostos consecutivos que consideremos, temos a certeza de que depois dela haverá infinitos números primos.

O maior número primo conhecido

Uma coisa é estar certo de que *existem* números primos tão grandes quanto se queira e outra é *saber* quais são esses números. Quanto

maior for o número natural, mais operações temos de efetuar para concluir se ele é primo ou não. Indicamos a seguir o maior dos números primos conhecidos:

$$2^{2281} - 1.$$

Este número tem cerca de setecentos algarismos no sistema decimal. Os cálculos que serviram para demonstrar que este número é primo foram realizados em máquinas modernas de calcular. (Ver os capítulos I e II).

Um cálculo muito trabalhoso

No cálculo prático encontram-se operações matemáticas cuja realização seria extraordinariamente difícil se não usássemos os métodos simplificadores da álgebra. Suponhamos que era necessário efetuar as seguintes operações:

$$1 + \frac{2}{90\,000\,000\,000}.$$

(Este cálculo é necessário para verificar se a técnica relacionada com as velocidades dos movimentos dos corpos — pequenas em comparação com a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas — pode utilizar as antigas leis que regulam a soma de velocidades, sem ter em conta as modificações que a teoria da relatividade introduziu na mecânica. De acordo com a antiga mecânica, o corpo submetido a dois movimentos efetuados numa mesma direção com velocidades de v_1

e v_2 quilômetros por segundo tem uma velocidade de $(v_1 + v_2)$ quilômetros por segundo. A nova teoria aplica a seguinte fórmula à velocidade dos corpos:

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \text{ km/s,}$$

onde c é a velocidade de propagação da luz no vácuo, aproximadamente igual a 300 000 quilômetros por segundo. Um corpo submetido a dois movimentos efectuados numa mesma direção e a uma velocidade de um quilômetro por segundo de acordo com a mecânica antiga, desenvolvia uma velocidade de 2 quilômetros por segundo e, de acôrdo com a nova,

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} \text{ km/s.}$$

Qual é a diferença entre estas duas fórmulas? Será perceptível essa diferença para os aparelhos de medição mais sensíveis? (Para esclarecer esta importante questão é preciso efetuar o cálculo indicado).

Usemos dois métodos: primeiro o aritmético e depois verifiquemos como se pode efetuar mediante a álgebra. Basta depois dar uma olhada na grande série de algarismos que figuram a seguir para nos convenceremos da indiscutível superioridade do método algébrico.

Em primeiro lugar transformemos a fração:

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001}.$$

Efetuemos agora a divisão do numerador pelo denominador:

$$\begin{array}{r}
 180\ 000\ 000\ 000 \overline{) 90\ 000\ 000\ 001} \\
 \underline{90\ 000\ 000\ 001} \\
 899\ 999\ 999\ 990 \\
 \underline{810\ 000\ 000\ 009} \\
 899\ 999\ 999\ 810 \\
 \underline{810\ 000\ 000\ 009} \\
 899\ 999\ 998\ 010 \\
 \underline{810\ 000\ 000\ 009} \\
 899\ 999\ 980\ 010 \\
 \underline{810\ 000\ 001\ 009} \\
 899\ 999\ 800\ 010 \\
 \underline{810\ 000\ 000\ 009} \\
 899\ 998\ 000\ 010 \\
 \underline{810\ 000\ 000\ 009} \\
 899\ 980\ 000\ 010 \\
 \underline{810\ 000\ 000\ 009} \\
 899\ 800\ 000\ 010 \\
 \underline{810\ 000\ 000\ 009} \\
 898\ 000\ 000\ 010 \\
 \underline{810\ 000\ 000\ 009} \\
 880\ 000\ 000\ 010 \\
 \underline{810\ 000\ 000\ 009} \\
 700\ 000\ 000\ 010 \\
 \underline{630\ 000\ 000\ 007} \\
 70\ 000\ 000\ 003
 \end{array}$$

Esta operação torna-se trabalhosa e esgotante, sendo extremamente fácil enganar-se e, portanto, incorrer em erros, enquanto que para a solução do problema tem muita importância saber exatamente onde termina o período dos nove e onde começa o de outro algarismo.

Compare agora este trabalho com a brevidade com que a álgebra cumpre a sua tarefa, valendo-se do seguinte fato: se a é uma fração muito próxima de zero,

$$\frac{1}{1+a} \approx 1 - a.$$

É muito fácil verificar a veracidade desta afirmação: comparemos o dividendo 1 com o produto do divisor pelo quociente:

$$1 = (1 + a)(1 - a),$$

isto é,

$$1 = 1 - a^2.$$

Como a é uma fração muito próxima de zero (por exemplo, 0,001), o valor de a^2 será ainda menor (0,000001), podendo ser desprezado.

Apliquemos o exposto ao nosso cálculo *:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} &= \frac{2}{1 + \frac{1}{9 \cdot 10^{10}}} \approx \\ &\approx 2(1 - 0,111 \dots \cdot 10^{-10}) = \\ &= 2 - 0,0000000000222 \dots = \\ &= 1,999\,999\,999\,9777 \dots \end{aligned}$$

Chega-se, portanto, ao mesmo resultado, mas o processo é muito mais curto.

(Talvez tenha interesse o leitor conhecer a importância que adquire o resultado do problema. Dele se deduz que, em virtude do

* No que se segue usamos a seguinte aproximação:

$$\frac{A}{1+a} \approx A(1-a).$$

escasso valor das velocidades em causa — em comparação com a velocidade da luz — não se observa na prática qualquer desvio da antiga lei da soma de velocidades: esse desvio manifesta-se apenas no décimo primeiro algarismo do número determinado, enquanto que nas medições de valor mais exato não se passa do nono algarismo, e na prática a técnica limita-se a 4 ou 6 algarismos. Logo, podemos afirmar sem qualquer reserva que a nova mecânica, a de Einstein, não altera os cálculos técnicos relativos ao movimento “lento” dos corpos no espaço (em comparação com a velocidade da luz).

Existe, porém, uma área da vida atual em que esta conclusão incondicional deve ser tomada com cuidado. Trata-se da cosmonáutica. Agora já alcançamos velocidades da ordem de 10 km por segundo (durante os vôos de satélites e foguetes). Neste caso a divergência da mecânica clássica e da de Einstein se faz sentir já no nono algarismo, e deve-se ter em conta que, num futuro próximo, haverá velocidades ainda maiores...)

Ocasões em que é preferível não recorrer à álgebra

A par dos casos em que a álgebra presta um grande serviço à aritmética, há outros em que a sua aplicação dá lugar a complicações desnecessárias. O verdadeiro conhecimento da matemática consiste em saber usar os recursos matemáticos de tal modo que sirvam para encontrar o caminho mais curto, seguro e sem

qualquer preocupação de que o método usado pertença à aritmética, à álgebra, à geometria, etc. Por isso é útil examinar um caso em que o emprego da álgebra apenas complica a solução. Como exemplo esclarecedor pode servir-nos o seguinte problema: Determinar o menor número que, dividido

por 2, dê resto 1,

" 3, " " 2,

" 4, " " 3,

" 5, " " 4,

" 6, " " 5,

" 7, " " 6,

" 8, " " 7,

" 9, " " 8.

Solução

Propuseram-me este problema, acompanhando-o com as seguintes palavras: como resolveria o senhor? Há aqui demasiadas equações, tornando-se muito trabalhoso.

A coisa é simples: para resolver o problema, não são necessárias nem equações nem álgebra. Resolve-se com um simples raciocínio aritmético.

Juntemos uma unidade ao número procurado. Qual será o resto da divisão deste número por dois? Será $1 + 1 = 2$, isto é, o número será exatamente divisível por 2. Igualmente, dará resto igual a zero se o dividirmos por 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O menor destes números será $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$ e o número procurado, 2519, o que é fácil de verificar.

Capítulo IV

As equações de Diofanto

$$x^n + y^n = z^n$$

Compra de um pulôver

Problema

Um pulôver custa 19 rublos, mas o freguês só tem notas de três rublos, e o caixa, apenas de cinco. É possível nestas condições efetuar o pagamento e como fazê-lo?

A solução deste problema se reduz em saber quantas notas de três rublos devem ser entregues ao caixa para que este dê o troco em notas de cinco, cobrando os 19 rublos. As incógnitas do problema são duas: o número de notas de três rublos (x) e o número de notas de cinco (y). Pode-se compor apenas uma equação:

$$3x - 5y = 19.$$

Embora uma equação com duas incógnitas tenha uma infinidade de soluções, isto não significa que entre elas haja alguma em que x e y sejam números inteiros e positivos (recordemos que se trata do número de notas de banco). Eis por que a álgebra elaborou o método de solução destas equações “indeterminadas”. O mérito de tê-las introduzido na álgebra pertence ao primeiro sábio europeu que cultivou esta ciência, a Diofanto, célebre matemá-

tico da antiguidade, pelo que estas equações se chamam com frequência “equações de Diofanto”.

Solução

No exemplo citado mostremos como se deve resolver tais equações.

Tem-se que encontrar o valor de x e de y na equação

$$3x - 5y = 19,$$

sem esquecer que tanto x como y são números *inteiros e positivos*.

Separando a incógnita cujo coeficiente é menor, isto é, o termo $3x$, teremos:

$$3x = 19 + 5y,$$

de onde

$$x = \frac{19+5y}{3} = 6 + y + \frac{1+2y}{3}.$$

Como x , 6 e y são números inteiros, a equação só pode ser certa no caso de $\frac{1+2y}{3}$ ser também um número inteiro. Designemo-lo pela letra t . Então

$$x = 6 + y + t,$$

de onde

$$t = \frac{1+2y}{3},$$

e, portanto,

$$3t = 1 + 2y, \quad 2y = 3t - 1.$$

Da última equação obtemos y :

$$y = \frac{3t-1}{2} = t + \frac{t-1}{2}.$$

Dado que y e t são números inteiros, $\frac{t-1}{2}$ deve ser um número inteiro t_1 . Por conseguinte,

$$y = t + t_1$$

e, além disso,

$$t_1 = \frac{t-1}{2},$$

de onde

$$2t_1 = t - 1 \quad \text{e} \quad t = 2t_1 + 1.$$

Substituamos o valor de $t = 2t_1 + 1$ nas igualdades anteriores:

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1,$$

$$\begin{aligned} x &= 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = \\ &= 8 + 5t_1. \end{aligned}$$

Desta forma encontramos para x e y as expressões *

$$x = 8 + 5t_1, \quad y = 1 + 3t_1.$$

* Na realidade, só demonstramos que toda a solução inteira para a equação $3x - 5y = 19$ se apresenta como $x = 8 + 5t_1$, $y = 1 + 3t_1$, de onde t_1 representa um número inteiro. Mas não demonstramos o contrário, que sendo t_1 um número inteiro *qualquer*, obteremos certa solução inteira. No entanto, é fácil convencer-nos disto invertendo a ordem dos nossos raciocínios ou colocando o valor de x e y na equação inicial.

Sabemos que x e y são inteiros e, além disso, positivos, isto é, maiores que 0; logo,

$$8 + 5t_1 > 0, \quad 1 + 3t_1 > 0.$$

Destas desigualdades encontramos:

$$5t_1 > -8 \quad \text{e} \quad t_1 > -\frac{8}{5},$$

$$3t_1 > -1 \quad \text{e} \quad t_1 > -\frac{1}{3}.$$

Com isto o valor t_1 está limitado. Ele é maior que $-\frac{1}{3}$ (e, claro, muito maior que $-\frac{8}{5}$). Mas como t_1 é um número inteiro, deduz-se que pode ter somente os seguintes valores: $t_1 = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Os valores correspondentes de x e y são:

$$x = 8 + 5t_1 = 8, 13, 18, 23, \dots,$$

$$y = 1 + 3t_1 = 1, 4, 7, 10, \dots$$

Vejamos agora de que modo se pode efetuar o pagamento: ou se dão 8 notas de três rublos, recebendo de troco uma de cinco:

$$8 \cdot 3 - 5 = 19,$$

ou se entregam 13 notas de três rublos, recebendo de troco 4 notas de cinco rublos:

$$13 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 19,$$

etc.

Teoricamente, este problema tem uma infinidade de soluções, mas na prática seu número é limitado, uma vez que nem o freguês

nem o caixa têm uma quantidade ilimitada de notas de banco. Se cada um dispõe, por exemplo, de 10 notas, o pagamento só pode ser efetuado de uma forma: dando 8 notas de três rublos e recebendo uma de cinco. Como vemos, na prática as equações indeterminadas podem dar soluções determinadas.

Voltando ao nosso problema, propomos ao leitor que, como exercício, resolva sozinho uma das variantes: concretamente, examinar o caso em que o freguês só tenha notas de cinco rublos, e o caixa, só de três. Neste caso aparecem as seguintes soluções:

$$x = 5, 8, 11, \dots,$$

$$y = 2, 7, 12, \dots$$

De fato,

$$5 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 19,$$

$$8 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 19,$$

$$11 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = 19.$$

.....

Poderíamos obter também estes resultados, tomando as soluções do problema principal mediante uma regra algébrica simples. Uma vez que *dar* notas de cinco rublos e *receber* de três equivale a “*receber* notas negativas de cinco rublos” e “*dar* notas negativas de três rublos”, a nova variante do problema é resolvida com a mesma equação que compusemos para o problema principal:

$$3x - 5y = 19,$$

mas com a condição de que x e y sejam números *negativos*. Por isso, das igualdades

$$x = 8 + 5t_1, \quad y = 1 + 3t_1,$$

sabendo que $x < 0$ e $y < 0$, deduzimos

$$8 + 5t_1 < 0, \quad 1 + 3t_1 < 0$$

e, por conseguinte

$$t_1 < -\frac{8}{5}.$$

Tomando $t_1 = -2, -3, -4$, etc., obtemos das fórmulas anteriores os seguintes valores para x e y :

$$t_1 = -2, -3, -4,$$

$$x = -2, -7, -12,$$

$$y = -5, -8, -11.$$

O primeiro par de soluções, $x = -2$, $y = -5$, significa que o freguês “paga menos duas notas de três rublos” e “recebe menos cinco notas de cinco”, ou seja, traduzido para o idioma comum, quer dizer que paga com cinco notas de cinco e recebe de troco duas notas de três. Desta mesma maneira interpretaremos também as demais soluções.

Revisão da contabilidade

Problema

Ao fazer a revisão dos livros de contabilidade de um estabelecimento, verificou-se que um dos livros tinha borrões de tinta.

Não era possível decifrar o número de metros de tecido vendidos, mas não havia dúvida que não era um número decimal. No custo da

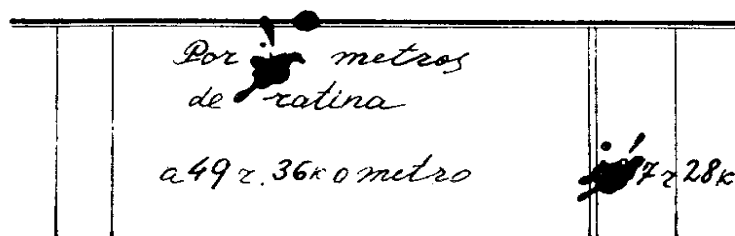


Fig. 11

venda podia-se distinguir apenas os três últimos algarismos e concluir que antes destes havia outros três.

Podia o fiscal averiguar quais eram os algarismos que se tinham escrito no livro, apenas com estes dados?

Solução

Representaremos o número de metros por x e o custo da venda, expresso em kopeks por 4936 x .

Designemos os três algarismos tapados pelo borrão por y . Estes expressam, sem dúvida, os milhares de kopeks, e a totalidade de kopeks será

$$1000y + 728.$$

Temos assim a equação

$$4936x = 1000y + 728.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por 8, resulta:

$$617x - 125y = 91.$$

Nesta equação, os números x e y são inteiros e, além disso, y não é superior a 999, visto que não pode ter mais que três algarismos. Resolvamos esta equação como indicamos anteriormente:

$$125y = 617x - 91,$$

$$\begin{aligned} y &= 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = \\ &= 5x - 1 + \frac{2(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t. \end{aligned}$$

(Fizemos $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$, visto que nos convém que se obtenha o menor resto possível. A fração

$$\frac{2(17 - 4x)}{125}$$

é um número inteiro, e como 2 não é divisível por 125, $\frac{17 - 4x}{125}$ deve ser um número inteiro que representamos por t).

A seguir, da equação

$$\frac{17 - 4x}{125} = t,$$

obtém-se

$$17 - 4x = 125t,$$

$$x = 4 - 31t + \frac{1 - t}{4} = 4 - 31t + t_1,$$

de onde

$$t_1 = \frac{1-t}{4},$$

portanto,

$$4t_1 = 1 - t;$$

$$t = 1 - 4t_1;$$

$$x = 125t_1 - 27,$$

$$y = 617t_1 - 134 *.$$

Sabe-se que

$$100 \leq y < 1000.$$

Portanto,

$$100 \leq 617t_1 - 134 < 1000,$$

de onde

$$t_1 \geq \frac{234}{617} \quad \text{e} \quad t_1 < \frac{1134}{617}.$$

É evidente que para t_1 existe apenas um valor inteiro:

$$t_1 = 1,$$

logo, $x = 98$ e $y = 483$. Isto significa que foram vendidos 98 metros por uma importância total de 4837 rublos e 28 kopeks. O que não se notava no livro foi, portanto, decifrado.

* Note-se que os coeficientes de t_1 são iguais aos de x e y na equação inicial $617x - 125y = 91$ e, além disso, um dos coeficientes de t_1 tem sinal contrário. Isto não é casual: pode-se demonstrar que deve suceder assim sempre que os coeficientes de x e de y forem primos entre si.

Compra de selos de correio

Problema

Temos 1 rublo para comprar 40 selos de correio de 1, 4 e 12 kopeks. Quantos selos de cada um destes preços podemos comprar?

Solução

Neste caso temos *duas* equações com *três* incógnitas:

$$x + 4y + 12z = 100,$$

$$x + y + z = 40,$$

onde x é o número de selos de 1 kopeks, y é o de 4 kopeks e z de 12 kopeks.

Subtraindo a segunda da primeira, obtemos uma equação com duas incógnitas

$$3y + 11z = 60.$$

Encontramos y :

$$y = 20 - 11 \cdot \frac{z}{3}.$$

É evidente que $\frac{z}{3}$ é um número inteiro. Designemo-lo por t .

Teremos

$$y = 20 - 11t, \quad z = 3t.$$

Substituindo o y e o z na segunda das equações iniciais:

$$x + 20 - 11t + 3t = 40;$$

obtemos

$$x = 20 + 8t.$$

Como $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, não é difícil estabelecer os limites de t :

$$0 \leq t \leq 1 \frac{9}{11},$$

de onde concluímos que para t só são possíveis dois valores inteiros:

$$t = 0 \quad \text{e} \quad t = 1.$$

Os valores correspondentes de x , y e z são:

$t =$	0	1
$x =$	20	28
$y =$	20	9
$z =$	0	3

Verificação:

$$20 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 0 \cdot 12 = 100,$$

$$28 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 3 \cdot 12 = 100.$$

Na compra dos selos são possíveis, como vimos, duas variantes (se for exigido que se compre *pelo menos um selo* de cada valor, só será possível uma variante).

Passemos a outro problema do mesmo tipo.

Compra de fruta

Problema

Por 5 rublos compram-se 100 unidades de diferentes frutas. Seus preços são os seguintes:

melancias 50 kopeks cada,

maçãs 10 " cada,

ameixas 1 kopek cada.

Que quantidade de frutas de cada espécie se comprou?

Solução

Indicando o número de melancias por x , o de maçãs por y e o de ameixas por z , compomos duas equações:

$$\begin{cases} 50x + 10y + 1z = 500, \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

Subtraindo da primeira equação a segunda, obteremos uma equação com duas incógnitas:

$$49x + 9y = 400.$$

O desenvolvimento subsequente do problema será o seguinte:

$$\begin{aligned} y &= \frac{400 - 49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1-x)}{9} = \\ &= 44 - 5x + 4t, \end{aligned}$$

$$t = \frac{1-x}{9}, \quad x = 1 - 9t,$$

$$y = 44 - 5(1 - 9t) + 4t = 39 + 49t.$$

Das desigualdades:

$$1 - 9t \geq 0 \quad \text{e} \quad 39 + 49t \geq 0$$

se deduz que

$$\frac{1}{9} \geq t \geq -\frac{39}{49}$$

e, por conseguinte, $t = 0$. Portanto,

$$x = 1 \quad \text{e} \quad y = 39.$$

Substituindo os valores de x e de y na segunda equação, deduziremos que $z = 60$.

Compram-se 1 melancia, 39 maçãs e 60 ameixas.

Só existe esta combinação.

Adivinhar o dia do nascimento

Problema

As equações indeterminadas permitem efetuar o seguinte truque matemático.

Pede-se a uma pessoa que multiplique o dia do seu nascimento por 12 e o mês por 31. Com a soma dos produtos desses dados pode ser determinada a data do aniversário da pessoa.

Se por exemplo nasceu a 9 de fevereiro, efetuam-se as seguintes operações:

$$9 \cdot 12 = 108, \quad 2 \cdot 31 = 62,$$

$$108 + 62 = 170.$$

Como se deduzirá a data do aniversário, conhecendo esta soma?

Solução

O problema consiste em resolver a equação indeterminada

$$12x + 31y = 170$$

na qual os valores das incógnitas devem ser inteiros e positivos. Além disso, o número do dia, x , não é superior a 31 e o do mês, y , não ultrapassa o 12.

$$x = \frac{170 - 31y}{12} = 14 - 3y + \frac{2 + 5y}{12} = 14 - 3y + t,$$

$$2 + 5y = 12t,$$

$$y = \frac{-2 + 12t}{5} = 2t - 2 \cdot \frac{1 - t}{5} = 2t - 2t_1,$$

$$1 - t = 5t_1, \quad t = 1 - 5t_1,$$

$$y = 2(1 - 5t_1) - 2t_1 = 2 - 12t_1,$$

$$x = 14 - 3(2 - 12t_1) + 1 - 5t_1 = 9 + 31t_1.$$

Sabemos que $31 \geq x > 0$ e $12 \geq y > 0$, e por isso os limites para t são:

$$-\frac{9}{31} < t_1 < \frac{1}{6}.$$

Portanto:

$$t_1 = 0, \quad x = 9 \quad \text{e} \quad y = 2.$$

A pessoa nasceu no dia 9 do segundo mês, isto é, em 9 de fevereiro.

Pode-se propor outra solução que não exige o emprego de equações. Disseram-nos o número $a = 12x + 31y$. Como $12x + 24y$ se di-

vide por 12, neste caso os números $7y$ e a , depois de divididos por 12, dão restos iguais. Multiplicando por 7, resulta que $49y$ e $7a$, depois de divididos por 12, dão restos iguais. Mas $49y = 48y + y$, e $48y$ é divisível por 12. Resulta que y e $7a$, ao serem divididos por 12, dão restos iguais. Em outras palavras, se a não se divide por 12, neste caso y é igual ao resto da divisão do número $7a$ por 12; mas se a se divide por 12, então $y = 12$. Este número y (número do mês) é perfeitamente determinado. Conhecendo-se y , é muito mais fácil determinar x .

Um pequeno conselho: antes de determinar o resto da divisão do número $7a$ por 12, troque o número a pelo resto da sua divisão por 12 — será mais fácil calcular. Por exemplo, se $a = 170$, tem-se que efetuar mentalmente os seguintes cálculos:

$$170 = 12 \cdot 14 + 2 \text{ (então o resto é 2);}$$

$$2 \cdot 7 = 14; 14 = 12 \cdot 1 + 2 \text{ (então } y = 2);$$

$$x = \frac{170 - 31y}{12} = \frac{170 - 31 \cdot 2}{12} =$$

$$= \frac{108}{12} = 9 \text{ (então } x = 9).$$

Agora pode-se dizer que a data do nascimento é 9 de fevereiro.

Demonstremos que o truque nunca falha, isto é, que a equação tem sempre uma só solução, sendo os seus valores inteiros e positivos. Representemos por a o número que nos é comunicado.

Neste caso a data do aniversário virá expressa por

$$12x + 31y = a.$$

Raciocinemos por redução ao absurdo. Suponhamos que esta equação tinha duas soluções diferentes inteiras e positivas, concretamente a solução x_1 e y_1 e a solução x_2 e y_2 . Além disso, nem x_1 nem x_2 são superiores a 31 e nem y_1 nem y_2 excedem 12. Temos

$$12x_1 + 31y_1 = a,$$

$$12x_2 + 31y_2 = a.$$

Subtraindo membro a membro a segunda equação da primeira, teremos:

$$12(x_1 - x_2) + 31(y_1 - y_2) = 0.$$

Desta igualdade deduz-se que o número $12(x_1 - x_2)$ é divisível por 31 e como x_1 e x_2 são números positivos que não excedem 31, a sua diferença é menor que 31. Por isso o número $12(x_1 - x_2)$ é divisível por 31 apenas quando for $x_1 = x_2$, isto é, quando a primeira solução coincidir com a segunda. Deste modo, a hipótese da existência de duas soluções *diferentes* conduz a uma solução contraditória.

A venda de frangos

Um problema antigo

Três irmãs foram vender frangos no mercado. Uma levou 10 frangos, outra 16 e a terceira 26. Ao meio dia, as três tinham vendido

ao mesmo preço uma parte dos frangos. Depois do meio dia, temendo que não pudessem desfazer-se de todos eles, baixaram o preço. As três irmãs regressaram a casa com igual quantia em dinheiro obtida com a venda das aves, ou seja, com 35 rublos cada uma.

A que preço venderam os frangos, antes e depois do meio dia?

Solução

Representemos o número de frangos vendidos por cada uma das irmãs até o meio dia por x , y e z . Depois do meio dia venderam $10 - x$, $16 - y$ e $26 - z$ frangos. O preço que vigorou de manhã será designado por m e o da tarde por n . Para uma maior clareza vejamos o quadro seguinte:

Número de frangos vendidos				Preço
Antes do meio dia . . .	x	y	z	m
Depois do meio dia . . .	$10 - x$	$16 - y$	$26 - z$	n

A primeira irmã obteve:

$$mx + n(10 - x); \text{ logo, } mx + n(10 - x) = 35.$$

A segunda:

$$my + n(16 - y); \text{ logo, } my + n(16 - y) = 35.$$

A terceira:

$$mz + n(26 - z); \text{ logo,}$$

$$mz + n(26 - z) = 35.$$

Temos assim este sistema de três equações:

$$\begin{cases} (m - n)x + 10n = 35, \\ (m - n)y + 16n = 35, \\ (m - n)z + 26n = 35. \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro da 3.^a equação, sucessivamente a primeira e a segunda, obteremos:

$$\begin{cases} (m - n)(z - x) + 16n = 0, \\ (m - n)(z - y) + 10n = 0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (m - n)(x - z) = 16n, \\ (m - n)(y - z) = 10n. \end{cases}$$

Dividindo, membro a membro, a primeira pela segunda:

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{8}{5}, \quad \text{ou} \quad \frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}.$$

Como x , y e z são números inteiros, as diferenças $x - z$ e $y - z$ são também números inteiros. Por esta razão, para que se tenha a igualdade

$$\frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5},$$

é preciso que $x - z$ seja divisível por 8 e $y - z$ por 5. Portanto

$$\frac{x - z}{8} = t = \frac{y - z}{5}.$$

Daqui resulta:

$$x = z + 8t, \quad y = z + 5t.$$

Notemos que t , além de inteiro, é um número positivo, já que $x > z$ (se assim não fosse, a primeira irmã não poderia conseguir tanto dinheiro quanto a terceira).

Como $x < 10$,

$$z + 8t < 10.$$

Sendo z e t números inteiros e positivos, a última desigualdade só pode ser satisfeita no caso de $z = 1$ e $t = 1$. Substituindo estes valores em

$$x = z + 8t \quad \text{e} \quad y = z + 5t,$$

resulta que $x = 9$ e $y = 6$.

Se nas equações

$$mx + n(10 - x) = 35,$$

$$mx + n(16 - y) = 35,$$

$$mx + n(26 - z) = 35$$

substituírmos os valores de x , y e z já conhecidos, teremos o preço de venda dos frangos:

$$m = 3\frac{3}{4} \text{ rublos}, \quad n = 1\frac{1}{4} \text{ rublos}.$$

Até o meio dia os frangos foram vendidos a 3,75 rublos e depois do meio dia a 1,25.

Dois números e quatro operações

Problema

O problema anterior, resolvido mediante um sistema de três equações com cinco incógnitas, não se resolveu pelos métodos habituais, mas sim por um raciocínio matemático livre. Por este mesmo processo resolveremos os problemas que damos a seguir, com o auxílio de equações indeterminadas do segundo grau.

Eis o primeiro desses problemas.

Com dois números inteiros e positivos realizaram-se as quatro operações seguintes:

- 1) adicionaram-se;
- 2) subtraiu-se o menor do maior;
- 3) multiplicaram-se;
- 4) dividiu-se o maior pelo menor.

A soma dos resultados obtidos foi 243. Determinar esses números.

Solução

Se o número maior é x e o menor y ,

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Multiplicando a equação por y , abrindo os parênteses e reduzindo os termos semelhantes, obteremos:

$$x(2y + y^2 + 1) = 243y.$$

Mas $2y + y^2 + 1 = (y + 1)^2$. Portanto:

$$x = \frac{243y}{(y + 1)^2}.$$

Para que o número x seja inteiro, é necessário que o denominador $(y + 1)^2$ seja um dos divisores de 243 (visto que y não tem fatores comuns com $y + 1$). Sabendo que $243 = 3^5$, deduz-se que 243 é divisível apenas pelos seguintes números que são quadrados perfeitos: $1, 3^2, 9^2$. Assim $(y + 1)^2$ deve ser igual a $1, 3^2$, ou 9^2 . Visto que y deve ser um número *positivo*, só pode ser 8 ou 2.

Então x será igual a

$$\frac{243 \cdot 8}{81}, \quad \text{ou} \quad \frac{243 \cdot 2}{9}.$$

Os números procurados são, portanto, 24 e 8 ou 54 e 2.

Como será o retângulo?

Problema

As medidas dos lados de um retângulo são números inteiros. Qual será o comprimento de tais lados para que o perímetro e a área desta figura se expressem pelo mesmo número?

Solução

Representando os lados do retângulo por x e y , teremos a equação

$$2x + 2y = xy,$$

de onde

$$x = \frac{2y}{y-2}.$$

Como x e y devem ser números positivos, tam-

bém o será o número $y - 2$, isto é, y deve ser maior que 2.

Por outro lado

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}.$$

Como x é um número inteiro, também $\frac{4}{y-2}$ o será.

Mas como $y > 2$, as condições do problema só são satisfeitas se y for igual a 3, 4 ou 6. Correspondentemente x for igual a 6, 4, 3.

Verifica-se, portanto, que a figura procurada será um retângulo cujos lados serão 3 e 6, ou um quadrado de lado igual a 4.

Dois números de dois algarismos

Problema

Os números 46 e 96 têm uma propriedade curiosa: o seu produto não se altera ainda que os algarismos que os formam troquem de lugar.

De fato,

$$46 \cdot 96 = 4416 = 64 \cdot 69.$$

Como averiguar se existem outros números de dois algarismos com idêntica propriedade?

Solução

Representando os algarismos dos números procurados por x , y , z e t , teremos a equação:

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z).$$

Abrindo os parênteses e reduzindo os termos semelhantes, obtém-se

$$xz = yt,$$

onde x , y , z e t são números inteiros menores que 10. Para determinar a solução, formam-se com os nove algarismos significativos todos os pares que dão o mesmo resultado:

$$1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$$

$$1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \quad 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$$

$$1 \cdot 8 = 4 \cdot 4 \quad 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

$$1 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \quad 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$$

$$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

As igualdades são, então, 9. De cada uma delas pode-se formar um ou dois grupos de algarismos procurados. Por exemplo, da igualdade $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ obtém-se

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24.$$

Da igualdade $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ encontramos duas soluções:

$$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36 \text{ e } 13 \cdot 62 = 31 \cdot 26.$$

Seguindo o mesmo processo, encontramos as seguintes soluções:

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24 \quad 23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$$

$$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36 \quad 24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$$

$$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48 \quad 24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$$

$$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26 \quad 26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$$

$$13 \cdot 93 = 31 \cdot 39 \quad 34 \cdot 86 = 43 \cdot 68$$

$$14 \cdot 82 = 41 \cdot 28 \quad 36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$$

$$23 \cdot 64 = 32 \cdot 46 \quad 46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$$

Os números pitagóricos

É simples e rigoroso o método que os agrimensores usam para traçar linhas perpendiculares num terreno e que consiste no seguinte.

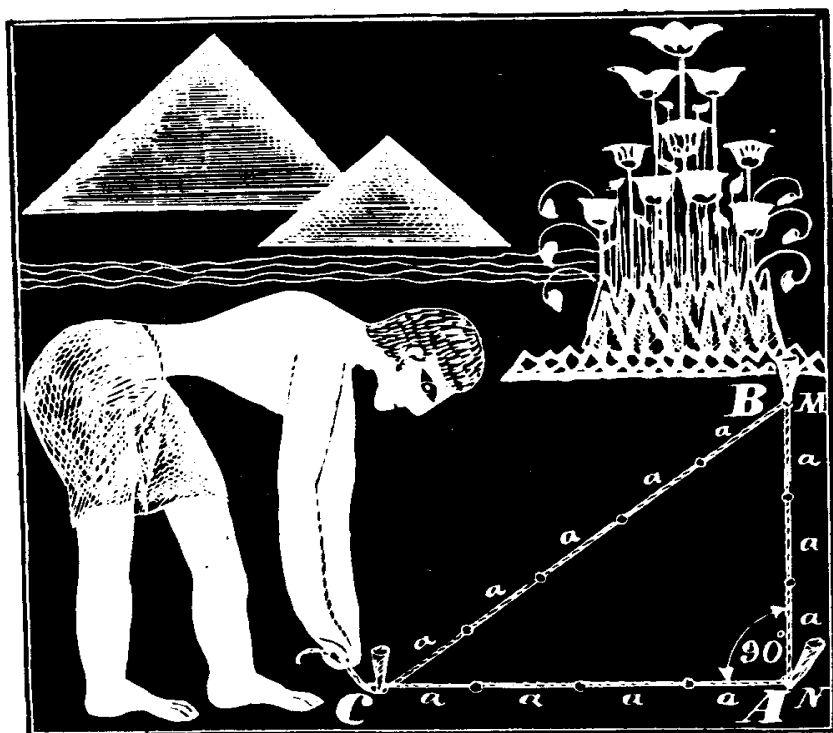


Fig. 12

Suponhamos que pelo ponto A temos que traçar uma perpendicular à reta MN (fig. 12). Na direção AM , a partir do ponto A , marca-se 3 vezes uma distância qualquer (a). Depois, numa corda dão-se três nós separados

por uma distância de $4a$ e $5a$. Fixando os nós extremos nos pontos A e B , determina-se C a partir do nó do meio. Assim se forma um triângulo em que o ângulo A é reto.

Este método, muito antigo, usado há milhares de anos pelos construtores das pirâmides egípcias, baseia-se no fato de os triângulos cujos lados estejam na relação $3 : 4 : 5$, serem retângulos de acordo com o conhecido teorema de Pitágoras, visto que

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Além dos números 3, 4 e 5, existe, como se sabe, uma infinidade de números inteiros e positivos a , b e c que satisfazem à relação

$$a^2 + b^2 = c^2$$

e que recebem a designação de *números pitagóricos*. De acordo com o teorema de Pitágoras, estes números podem expressar o comprimento dos lados de um triângulo retângulo. Os lados a e b serão os *catetos* e c a *hipotenusa*.

É evidente que se a , b e c constituem um terno de números pitagóricos, os números pa , pb e pc (onde p é um número inteiro) serão também números pitagóricos. E reciprocamente, se os números pitagóricos têm um fator comum, podem ser divididos por este, obtendo-se um novo conjunto de números pitagóricos. Por isso, para começar, analisemos três números pitagóricos que sejam primos entre si (os restantes se determinam multiplicando estes por um fator inteiro p).

Demonstremos que um dos números que designam os comprimentos dos catetos (a ou b)

deve ser par e outro ímpar. Raciocinemos por redução ao absurdo. Se os dois catetos a e b fossem pares, também o seria a soma $a^2 + b^2$ e, portanto, o mesmo sucederia com a hipotenusa. Porém, isto está em contradição com a hipótese de os números a , b e c não terem divisores comuns, visto 2 dividir exatamente três números pares. Assim, pelo menos um dos catetos a ou b deve ser ímpar.

Podemos sugerir outra hipótese: a de ambos os catetos serem ímpares e a hipotenusa par. Não é difícil demonstrar que isto é impossível. De fato, se as medidas dos catetos são números da forma

$$2x + 1 \quad \text{e} \quad 2y + 1,$$

a soma dos seus quadrados será igual a

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = \\ = 4(x^2 + x + y^2 + y) + 2, \end{aligned}$$

isto é, trata-se de um número que, dividido por 4, dá um resto igual a 2. No entanto, o quadrado de um número par deve ser exatamente divisível por 4. Portanto, a soma dos quadrados de dois números ímpares não pode ser o quadrado de um número par. Em outras palavras, três números nessas condições não são pitagóricos.

Logo, dos catetos a e b um é par e o outro ímpar. Por isso o número $a^2 + b^2$ é ímpar e, conseqüentemente, também o será a hipotenusa c .

Suponhamos que a é o cateto ímpar e b o par. Da igualdade

$$a^2 + b^2 = c^2$$

obteremos facilmente

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b).$$

Os fatores $c + b$ e $c - b$ são primos entre si. De fato, se estes números admitíssem um divisor comum primo, exceto a unidade, também seria múltiplo de tal divisor primo a sua soma

$$(c + b) + (c - b) = 2c,$$

a sua diferença

$$(c + b) - (c - b) = 2b,$$

e o seu produto

$$(c + b)(c - b) = a^2,$$

isto é, os números $2c$, $2b$ e a teriam um divisor comum que não pode ser 2 e, por isso, os números a , b e c teriam esse fator em comum, o que é impossível. A contradição obtida demonstra que os números $c + b$ e $c - b$ são primos entre si.

Mas se o produto de dois números primos entre si é um quadrado, também o será cada um deles, isto é,

$$\begin{cases} c + b = m^2, \\ c - b = n^2. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, encontramos

$$c = \frac{m^2 + n^2}{2}, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2},$$

$$a^2 = (c + b)(c - b) = m^2 n^2, \quad a = mn.$$

Daqui se conclui que os números pitagóricos estudados são da forma

$$a = mn, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2},$$

onde m e n são números ímpares primos entre si. O leitor pode convencer-se facilmente do contrário: as fórmulas citadas, com quaisquer m e n , números ímpares primos entre si, dão os números pitagóricos a , b e c .

Damos a seguir alguns números pitagóricos, obtidos a partir de diferentes valores de m e n :

Para	$m = 3,$	$n = 1$	$3^2 + 4^2 = 5^2$
"	$m = 5,$	$n = 1$	$5^2 + 12^2 = 13^2$
"	$m = 7,$	$n = 1$	$7^2 + 24^2 = 25^2$
"	$m = 9,$	$n = 1$	$9^2 + 40^2 = 41^2$
"	$m = 11,$	$n = 1$	$11^2 + 60^2 = 61^2$
"	$m = 13,$	$n = 1$	$13^2 + 84^2 = 85^2$
"	$m = 5,$	$n = 3$	$15^2 + 8^2 = 17^2$
"	$m = 7,$	$n = 3$	$21^2 + 20^2 = 29^2$
"	$m = 11,$	$n = 3$	$33^2 + 56^2 = 65^2$
"	$m = 13,$	$n = 3$	$39^2 + 80^2 = 89^2$
"	$m = 7,$	$n = 5$	$35^2 + 12^2 = 37^2$
"	$m = 9,$	$n = 5$	$45^2 + 28^2 = 53^2$
"	$m = 11,$	$n = 5$	$55^2 + 48^2 = 73^2$
"	$m = 13,$	$n = 5$	$65^2 + 72^2 = 97^2$
"	$m = 9,$	$n = 7$	$63^2 + 16^2 = 65^2$
"	$m = 11,$	$n = 7$	$77^2 + 36^2 = 85^2$

(Todos os restantes ternos de números pitagóricos ou têm divisores comuns ou contêm números maiores que 100).

Os números pitagóricos têm, em geral, propriedades curiosas, que enunciaremos sem as demonstrar:

1) Um dos catetos deve ser um múltiplo de *três*.

2) Um dos catetos deve ser um múltiplo de *quatro*.

3) Um dos números pitagóricos deve ser múltiplo de *cinco*.

O leitor pode convencer-se da existência dessas propriedades examinando os exemplos de números pitagóricos dados anteriormente.

Equação indeterminada do terceiro grau

A soma dos cubos de três números inteiros pode ser o cubo de um quarto número. Por exemplo,

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Isto significa, entre outras coisas, que o cubo cuja aresta é igual a 6 cm é equivalente à soma dos volumes de três cubos cujas arestas sejam respectivamente iguais a 3, 4 e 5 centímetros (fig. 13). Segundo se diz, esta correlação interessou vivamente a Platão.

Tentemos determinar outras relações do mesmo gênero. isto é, resolvamos o seguinte problema: determinar as soluções da equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3,$$

É mais cômodo, porém, designar a incógnita u por $-t$, visto que a equação terá uma forma mais simples:

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0.$$

Vejamos um método que nos permita determinar múltiplas soluções desta equação que são números inteiros (positivos e negativos).

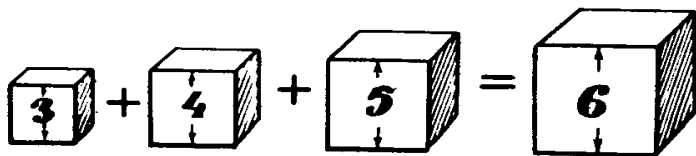


Fig. 13

Suponhamos que a, b, c, d e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são os conjuntos de números que satisfazem à equação. Adicionemos os números do primeiro conjunto aos do segundo multiplicados por um dado número k e procuremos que os números obtidos

$$a + k\alpha, b + k\beta, c + k\gamma, d + k\delta,$$

também satisfaçam à equação. Em outras palavras, escolhemos k de modo que se verifique a igualdade:

$$(a + k\alpha)^3 + (b + k\beta)^3 + (c + k\gamma)^3 + (d + k\delta)^3 = 0.$$

Abrindo os parênteses e tendo em conta que a, b, c, d e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ satisfazem à equação dada, isto é, se verificam as igualdades:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0,$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 3a^2k\alpha + 3ak^2\alpha^2 + 3b^2k\beta + 3bk^2\beta^2 + \\
 + 3c^2k\gamma + 3ck^2\gamma^2 + 3d^2k\delta + 3dk^2\delta^2 = \\
 = 0,
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 3k [(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + d^2\delta) + \\
 + k (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2)] = 0.
 \end{aligned}$$

O produto será igual a zero apenas quando um dos seus fatores o for. Igualando cada um dos fatores a zero, obteremos dois valores para k . O primeiro, $k = 0$, não nos interessa, pois significa que não adicionamos nada aos números a , b , c e d . Por isso consideraremos apenas o segundo valor de k :

$$k = - \frac{a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + d^2\delta}{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2}.$$

Daqui se conclui que, conhecendo dois conjuntos de quatro números que satisfaçam à equação inicial, pode ser determinado um novo conjunto. Para isso temos que adicionar aos números do primeiro quaterno os do segundo multiplicados por k , que tem o valor indicado anteriormente.

Para se poder empregar este método, é necessário encontrar *dois* conjuntos de quatro números que satisfaçam às condições da equação inicial. Um deles (3, 4, 5 e —6) já é conhecido. Como determinar o outro? Não é difícil encontrar uma saída para esta situação: o conjunto pode ser formado pelos números r , $-r$, s , $-s$ que satisfazem, sem dúvida, às

condições da equação inicial. Em outras palavras, suponhamos que

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5, \quad d = -6, \\ \alpha = r, \quad \beta = -r, \quad \gamma = s, \quad \delta = -s.$$

Então k terá a seguinte forma:

$$k = -\frac{-7r-11s}{7r^2-s^2} = \frac{7r+11s}{7r^2-s^2}$$

e os números $a + k\alpha$, $b + k\beta$, $c + k\gamma$, $d + k\delta$ serão respectivamente iguais a

$$\frac{28r^2+11rs-3s^2}{7r^2-s^2}, \quad \frac{21r^2-11rs-4s^2}{7r^2-s^2}, \\ \frac{35r^2+7rs+6s^2}{7r^2-s^2}, \quad \frac{-42r^2-7rs-5s^2}{7r^2-s^2}.$$

De acordo com o exposto, estas quatro expressões satisfazem à equação inicial

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0.$$

Como todas as frações têm o mesmo denominador, podemos prescindir dele. (Portanto, os numeradores destas frações também satisfazem à equação dada). Verificou-se, pois, que a equação dada é satisfeita (qualquer que sejam r e s) pelos seguintes números:

$$x = 28r^2 + 11rs - 3s^2,$$

$$y = 21r^2 - 11rs - 4s^2,$$

$$z = 35r^2 + 7rs + 6s^2,$$

$$t = -42r^2 - 7rs - 5s^2,$$

como se pode comprovar elevando estas expressões ao cubo e adicionando-as. Atribuindo a r e s diversos valores inteiros, podemos obter uma série de soluções da equação que são números inteiros. Se nestas circunstâncias os números obtidos têm um divisor comum, podemos dividir por ele todos os números. Por exemplo, se $r = 1$, $s = 1$, obteremos para x , y , z e t respectivamente 36, 6, 48, -54 , que, divididos por 6, dão 6, 1, 8, -9 . Por conseguinte,

$$6^3 + 1^3 + 8^3 = 9^3.$$

Indicamos a seguir uma série de igualdades do mesmo tipo (obtidas depois de divididas por um fator comum):

$$r = 1, \quad s = 2 \quad 38^3 + 73^3 = 17^3 + 76^3,$$

$$r = 1, \quad s = 3 \quad 17^3 + 55^3 = 24^3 + 54^3,$$

$$r = 1, \quad s = 5 \quad 4^3 + 110^3 = 67^3 + 101^3,$$

$$r = 1, \quad s = 4 \quad 8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3,$$

$$r = 1, \quad s = -1 \qquad 7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3,$$

$$r = 1, \quad s = -2 \quad 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3,$$

$$r = 2, \quad s = -1 \quad 29^3 + 34^3 + 44^3 = 53^3.$$

.....

Observemos que se no conjunto (de quatro números) inicial 3, 4, 5, —6 ou em algum dos obtidos depois se mudam de lugar os números e se aplica o mesmo método, obteremos uma nova série de soluções. Por exemplo, tomando o conjunto 3, 5, 4, —6 (isto é, supondo que $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$, $d = -6$), obteremos para x , y , z e t os valores:

$$x = 20r^2 + 10rs - 3s^2,$$

$$y = 12r^2 - 10rs - 5s^2,$$

$$z = 16r^2 + 8rs + 6s^2,$$

$$t = -24r^2 - 8rs - 4s^2.$$

Daqui, variando os valores de r e s , obtemos uma série de novas relações:

$$r = 1, s = 1 \quad 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3,$$

$$r = 1, s = 3 \quad 23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3,$$

$$r = 1, s = 5 \quad 5^3 + 163^3 + 164^3 = 206^3,$$

$$r = 1, s = 6 \quad 7^3 + 54^3 + 57^3 = 70^3,$$

$$r = 2, s = 1 \quad 23^3 + 97^3 + 86^3 = 116^3,$$

$$r = 1, s = -3 \quad 3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3,$$

etc.

Desta maneira pode-se obter um número infinito de soluções da equação dada.

Cem mil marcos pela demonstração de um teorema

Certo problema de equações indeterminadas adquiriu certa vez uma enorme popularidade

devido ao fato de a quem o resolvesse ser oferecido todo um capital: 100 000 marcos alemães!

O problema consiste em demonstrar a seguinte tese chamada teorema ou “grande proposição” de Fermat:

A soma de potências de igual grau de dois números inteiros não pode ser igual à potência de um terceiro número inteiro. Exclui-se apenas a segunda potência, para a qual isso é possível.

Em outras palavras, temos que demonstrar que a equação

$$x^n + y^n = z^n$$

não tem solução inteira para $n > 2$.

Esclarecemos o que foi dito. Vimos que as equações

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

têm tantas soluções inteiras quantas se quizerem. No entanto, é impossível encontrar três números inteiros e positivos que satisfaçam a igualdade $x^3 + y^3 = z^3$.

Idêntico fracasso surge quando se trata de potências de quarto, quinto, sexto graus, etc. É isto o que afirma o teorema de Fermat.

Que se exigia dos aspirantes ao prêmio? Que demonstrassem esta tese para todas as

potências que cumpram as condições dadas. Mas o caso é que o teorema de Fermat não está ainda demonstrado e permanece, por assim dizer, no ar.

Decorreram três séculos desde que foi formulado, sem que os matemáticos tenham conseguido demonstrá-lo. As figuras mais exímias desta ciência ocuparam-se do problema mas, na melhor das hipóteses, apenas conseguiram demonstrar o teorema para alguns expoentes ou para certos conjuntos deles. Mas não se conseguiu uma demonstração geral para *qualquer* expoente inteiro.

O interessante do caso é que esta demonstração inacessível do teorema de Fermat, pelo visto, foi descoberta em certa ocasião e depois se extraviou. O autor do teorema, o genial matemático Pierre de Fermat *, afirmava que conhecia a demonstração. A sua “grande proposição” foi escrita por ele (o mesmo sucedendo com uma série de teoremas da teoria dos números) em forma de observação nas margens de uma obra de Diofanto, acompanhada das seguintes palavras:

* *Pierre Fermat* (1603-1665) não era um matemático profissional. Era jurista e conselheiro do parlamento; dedicava-se a investigações matemáticas só nas horas livres. No entanto, fez uma série de descobertas matemáticas extraordinárias, as quais, diga-se de passagem, não publicou, mas que, de acordo com o que se costumava fazer nessa época, dava a conhecer na sua correspondência com homens de ciências seus amigos: Pascal, Descartes, Huygens, Roberval e outros.

“Encontrei uma demonstração verdadeiramente assombrosa para esta proposição, mas aqui há pouco espaço para desenvolvê-la”.

Em nenhum lugar, nem nos documentos do grande matemático nem na sua correspondência, foi possível encontrar vestígios desta demonstração.

Os discípulos de Fermat tiveram que caminhar por si próprios. Indicamos alguns resultados desses esforços: Euler (1797) demonstrou o teorema de Fermat para as potências de terceiro e quarto graus. Para as do quinto grau, foi Legendre (1823) quem demonstrou o teorema. Para as de sétimo *, Lamé e Lebesgue (1840). Em 1849, Kummer demonstrou o teorema para uma grande série de potências e, entre outros, para todos os expoentes inferiores a cem. Estes últimos trabalhos ultrapassaram em muito a esfera da matemática conhecida por Fermat, pelo que começa a ser considerado problemático o fato de este último ter encontrado a demonstração geral do seu teorema. Além disso, é possível que ele tenha se equivocado.

Quem sentir curiosidade pela história e estado atual do problema de Fermat, pode ler o opúsculo de A. Khintchin, *O Grande Teorema de Fermat*. Esta publicação, obra de um especialista, é dedicada a leitores que só possuem conhecimentos elementares de matemática.

* Para os expoentes compostos (exceto o 4) não é preciso nenhuma demonstração especial: estes casos se reduzem aos casos de expoentes primos.

Capítulo V

A sexta operação matemática

$$\sqrt[2]{2} > \sqrt[5]{5}$$

A sexta operação

A adição e a multiplicação têm cada uma a sua operação inversa, a subtração e a divisão. A quinta operação aritmética, a potenciação ou a elevação a expoentes, tem *duas* operações inversas: determinação da base e do expoente. Quando a incógnita é a base, temos a *sexta* operação matemática, denominada extração da raiz. A determinação do expoente, a *sétima* operação, chama-se cálculo logarítmico. É fácil compreender por que motivo a potenciação tem duas operações inversas, enquanto que a adição e a multiplicação têm apenas uma. É que a ordem das parcelas (primeira e segunda) pode ser alterada, o mesmo acontecendo com os fatores, na multiplicação. Contudo, os elementos da potenciação, isto é, a base e o expoente, não gozam desta propriedade, pelo que não podem trocar-se as suas funções (por exemplo, $3^5 \neq 5^3$). Daqui resulta que para determinar cada um dos termos da adição ou da multiplicação se usem os mesmos processos, enquanto que a base da potência se determina por um processo diferente do utilizado para determinar o seu expoente.

A sexta operação, a extração da raiz, se designa pelo sinal $\sqrt{}$. Nem todos sabem que este sinal é uma variante da letra latina *r*, a primeira da palavra *radix*, que significa “raiz”. Em outros tempos (no século XVI), o sinal de raiz não era o *r* (minúsculo) mas sim o *R* (maiúsculo) e a seguir a ele escrevia-se a primeira letra da palavra latina *quadratus*, o *q*, ou a primeira de *cubus*, o *c*, indicando com elas que a raiz a ser extraída era quadrada ou cúbica *. Escreviam, por exemplo,

$R \cdot q \cdot 4352$

em vez da expressão atual

$\sqrt{4352}$.

Se a isto acrescentarmos que na época não eram em geral usados os sinais atuais de mais e menos, e que em seu lugar se escreviam as letras *p* (de plus) e *m* (de minus), e que os parênteses eram expressos pelos sinais $\lfloor$, $\rfloor$, compreenderemos o aspecto estranho que as expressões algébricas ofereciam a um leitor contemporâneo.

Veja-se uma delas tirada, por exemplo, de um livro do antigo matemático Bombelli (ano de 1572):

$R \cdot c \cdot \lfloor R \cdot q \cdot 4352 p \cdot 16 \rfloor m \cdot \quad R \cdot c \cdot \lfloor R \cdot q \cdot 4352 m \cdot 16 \rfloor$;

* No manual de matemática escrito por Magnitski e que era livro de texto na Rússia durante a primeira metade do século XVIII não existe nenhum sinal especial para a operação de extração de raízes.

e atualmente se escreve

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352+16}} - \sqrt[3]{\sqrt{4352-16}}.$$

Para a operação $\sqrt[n]{a}$, além desta expressão usa-se a de $a^{\frac{1}{n}}$, muito cômoda para generalizar graficamente a ideia de que toda raiz não é senão uma potência com um expoente fracionário. Esta segunda variante foi proposta por Simon Stevin, notável matemático holandês de século XVI.

Qual raiz é maior?

Problema 1

O que é maior, $\sqrt[5]{5}$ ou $\sqrt{2}$?

Resolver este e os problemas seguintes *sem determinar as raízes*.

Solução

Elevando ambas as expressões à décima potência, obteremos

$$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25, \quad (\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32;$$

e como $32 > 25$,

$$\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}.$$

Problema 2

Qual raiz é maior: $\sqrt[4]{4}$ ou $\sqrt[7]{7}$?

Solução

Elevando ambas as expressões à vigésima oitava potência, obteremos

$$(\sqrt[4]{4})^{28} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 \cdot 2^7 = 128^2.$$

$$(\sqrt[7]{7})^{28} = 7^4 = 7^2 \cdot 7^2 = 49^2.$$

Como $128 > 49$, resulta que

$$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$$

Problema 3

O que é maior: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ ou $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

Solução

Elevando ambas as expressões ao quadrado, resultará:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70},$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}.$$

Subtraindo 17 dos resultados obtidos, fica:

$$2\sqrt{70} \quad \text{e} \quad 5 + 2\sqrt{57}.$$

Elevando cada um destes números ao quadrado, obtemos

$$280 \quad \text{e} \quad 253 + 20\sqrt{57}.$$

Subtraindo 253 de cada um dos números anteriores, resulta:

$$27 \quad \text{e} \quad 20\sqrt{57}.$$

Como $\sqrt{57}$ é maior que 2, então $20\sqrt{57} > 40$; por conseguinte,

$$\sqrt{3} + \sqrt{19} > \sqrt{7} + \sqrt{10}.$$

Resolver mentalmente

Problema

Observe a equação $x^{x^3} = 3$ atentamente e diga qual é o valor de x .

Solução

Todo aquele que conhecer os símbolos algébricos concluirá que

$$x = \sqrt[3]{3}.$$

De fato,

$$x^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3$$

e, por conseguinte,

$$x^{x^3} = x^3 = 3.$$

Aqueles a quem esta solução mental venha a ser difícil, podem utilizar, para determinar com maior simplicidade o valor da incógnita, o seguinte raciocínio.

Admitamos que

$$x^3 = y.$$

Então

$$x = \sqrt[3]{y}$$

e a equação dada terá a forma

$$(\sqrt[3]{y})^y = 3$$

Elevando ao cubo ambos os membros da última igualdade, vem:

$$y^y = 3^3$$

Então, é evidente que $y = 3$ e, por conseguinte,

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3},$$

Comédias algébricas

Problema 1

A sexta operação algébrica permite representar autênticas comédias e farsas algébricas com os seguintes argumentos: $2 \cdot 2 = 5$; $2 = 3$, etc. A graça de tais representações algébricas reside num erro bastante elementar, mas que, por estar muito escondido, demora a ser descoberto.

Mostremos duas peças deste repertório cômico da álgebra. Primeira:

$$2 = 3.$$

Em primeiro lugar aparece em cena uma igualdade indiscutível:

$$4 - 10 = 9 - 15.$$

No “quadro” seguinte, adicionamos a ambos os membros desta igualdade $6 \frac{1}{4}$:

$$4 - 10 + 6 \frac{1}{4} = 9 - 15 + 6 \frac{1}{4}.$$

O posterior desenrolar da comédia se reduz às transformações:

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} \right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2} \right)^2,$$

$$\left(2 - \frac{5}{2} \right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2} \right)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade, obtemos

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Adicionando $\frac{5}{2}$ a ambos os membros da igualdade anterior, chegamos à igualdade absurda

$$2 = 3.$$

Onde está o erro?

Solução

O erro consiste em que da expressão

$$\left(2 - \frac{5}{2} \right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2} \right)^2$$

se deduz que

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Ainda que os quadrados de dois números sejam iguais, isso não significa que os números o sejam, pois sabemos que $(-5)^2 = 5^2$ e -5 e 5 são diferentes. Os quadrados de dois números diferentes são iguais se esses números forem simétricos. É o que acontece no nosso

exemplo:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

mas

$$-\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}.$$

Problema 2

A outra farsa algébrica (fig. 14)

$$2 \cdot 2 = 5$$

desenrola-se de um modo semelhante à anterior e baseia-se no mesmo truque. Em cena

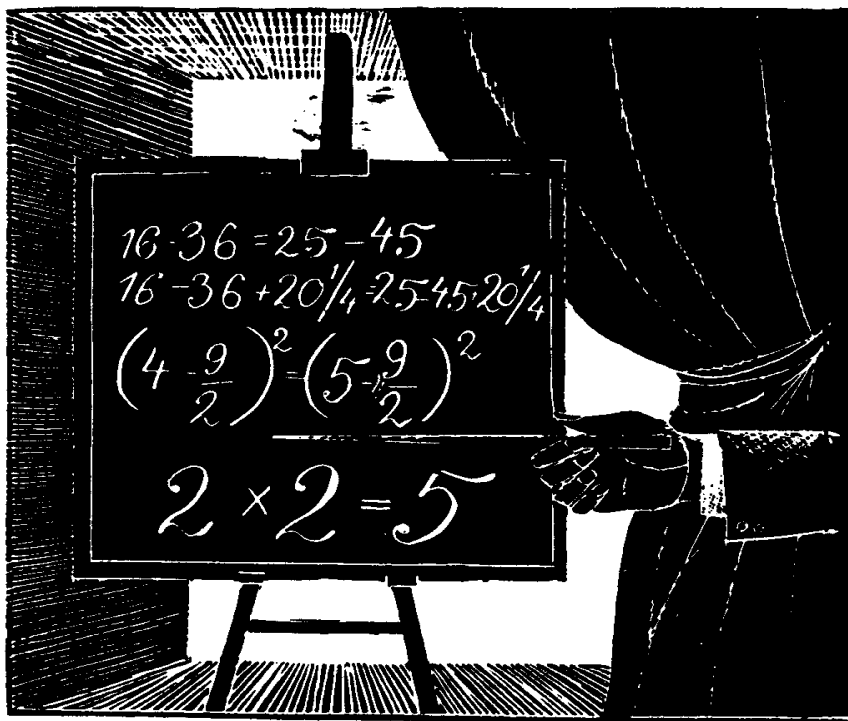


Fig. 14

aparece uma igualdade que não desperta nenhuma desconfiança

$$16 - 36 = 25 - 45.$$

Adicionamos a ambos os membros a mesma quantidade:

$$16 - 36 + 20 \frac{1}{4} = 25 - 45 + 20 \frac{1}{4}.$$

A seguir faremos as seguintes transformações:

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2.$$

Depois, mediante o absurdo raciocínio anterior, chegaremos a

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}.$$

$$4 = 5,$$

$$2 \cdot 2 = 5.$$

Estes exemplos cômicos devem pôr os matemáticos inexperientes de prevenção contra qualquer atitude descuidada em relação às equações que tiverem a incógnita sob radical.

Capítulo VI

Equações do segundo grau

17, 18, 19

O aperto de mãos

Problema

As pessoas que assistiram a uma reunião cumprimentaram-se, apertando as mãos. Uma delas verificou que foram 66 os apertos de mãos. Quantas pessoas estiveram na reunião?

Solução

O problema resolve-se facilmente se recorrermos à álgebra. Cada uma das x pessoas cumprimentou as outras $x - 1$. Logo, o número total de apertos de mãos devia ser $x(x - 1)$. Porém, deve-se ter em conta que quando Ivanov aperta a mão de Petrov, este aperta a mão de Ivanov. Assim o número de apertos de mãos é metade de $x(x - 1)$. Por conseguinte, surge a equação

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66,$$

ou seja, depois das transformações convenientes,

$$x^2 - x - 132 = 0,$$

de onde:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2},$$

$$x_1 = 12, \quad x_2 = -11.$$

Como a raiz negativa (—11 pessoas) carece de sentido, desprezamo-la, conservando apenas a primeira: na reunião estiveram 12 pessoas.

O enxame de abelhas

Problema

Antigamente estava muito em voga na Índia uma diversão singular: a resolução de quebra-cabeças em competições públicas. Os manuais de matemática desse país contribuíram para que se realizassem tais campeonatos de cálculo mental. “Aplicando as regras aqui expostas — escreveu o autor de um de tais livros, — um homem inteligente pode idear milhares de problemas semelhantes. Assim como o Sol faz empalidecer as estrelas com o seu brilho, um homem engenhoso pode eclipsar a glória de outro nos concursos populares, propondo e resolvendo problemas algébricos”. No original, estas palavras apresentam um aspecto mais poético, visto que o livro está escrito em verso. Enunciemos em prosa um destes quebra-cabeças.

Um grupo de abelhas cujo número era igual à raiz quadrada da metade de todo o enxame pousou num jasmim deixando muito para

trás $\frac{8}{9}$ do enxame. Apenas uma abelha desse enxame voava em torno de uma flor de lótus, atraída pelo zumbido de uma amiga que imprudentemente caíra na armadilha da flor de doce fragância.

Quantas abelhas tinha o enxame?

Solução

Se expressarmos o número total de abelhas do enxame por x , teremos a equação do seguinte aspecto

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x.$$

A equação anterior pode ser simplificada introduzindo uma incógnita auxiliar:

$$y = \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Então $x = 2y^2$ e obteremos a seguinte equação:

$$y + \frac{16y^2}{9} + 2 = 2y^2 \quad \text{ou} \quad 2y^2 - 9y - 18 = 0.$$

A equação tem duas raízes para y :

$$y_1 = 6, \quad y_2 = -\frac{3}{2},$$

e outras duas para x :

$$x_1 = 72, \quad x_2 = 4,5.$$

Mas como o número de abelhas tem que ser inteiro e positivo, só serve a primeira raiz: o enxame tinha, portanto, 72 abelhas.

Verifiquemos:

$$\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9} \cdot 72 + 2 = 6 + 64 + 2 = 72.$$

O bando de macacos

Problema

Outro dos problemas indianos pode ser apresentado em verso, tal como foi traduzido por Lébedev, autor do excelente livro *Quem Inventou a Álgebra?*



Fig. 15

Brincavam os macacos
divididos em dois bandos:
o quadrado da oitava parte
no bosque se divertia.
Com gritos alegres, doze
atroando o campo estão . . .
Sabemos quantos macacos há
no bando, no total?

Solução

Se o número total dos macacos do bando for x , temos

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x,$$

de onde

$$x_1 = 48, \quad x_2 = 16.$$

O problema tem duas soluções positivas: no bando podem haver 48 ou 16 macacos. Ambas as soluções satisfazem às condições do problema.

Previdência das equações

Nos casos examinados e de acordo com as condições dos problemas, fizemos uso diferente das duas raízes obtidas. No primeiro caso rejeitamos a raiz negativa por não corresponder ao conteúdo do problema, no segundo desprezamos a raiz fracionária e negativa, mas no terceiro, ao contrário, utilizamos as duas raízes. A presença de uma segunda solução é, às vezes, completamente inesperada não só para quem resolve o problema, como

para o seu autor. Mostremos, com um exemplo, como a equação é mais previdente do que quem a compõe.

Uma bola foi lançada ao ar com uma velocidade de 25 metros por segundo. Depois de quantos segundos estará a bola a 20 m de altura?

Solução

Para os corpos lançados para cima e livres, na sua ascensão, de qualquer resistência, a mecânica estabelece as seguintes relações entre a altura a que sobe o corpo sobre a terra (h), a sua velocidade inicial (v), a aceleração da gravidade (g) e o tempo (t):

$$h = vt - \frac{gt^2}{2} .$$

Neste exemplo concreto podemos desprezar a resistência do ar por ser muito pequena em relação à velocidade. A fim de simplificar as operações, atribuímos a g o valor de 10 em vez de 9,8 m (o erro é de apenas 0,2%). Substituindo h , v e g pelos seus valores na fórmula indicada, teremos a seguinte equação:

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2} ,$$

ou seja, depois de eliminar o denominador e simplificar,

$$t^2 - 5t + 4 = 0 .$$

Resolvendo esta equação, obtemos as raízes:

$$t_1 = 1 \quad \text{e} \quad t_2 = 4 .$$

A bola estará a uma altura de 20 metros duas vezes: a um e a quatro segundos depois de ter sido lançada.

Talvez nos pareça inverossímil e, sem refletir, queiramos desprezar a segunda raiz. Mas isto seria um erro. A segunda solução é completamente lógica: a bola deve realmente estar duas vezes à altura de 20 m: uma ao subir e outra ao descer.

Deduz-se facilmente que a bola, com a velocidade inicial de 25 metros por segundo, deve subir durante 2,5 segundos e atingir a altura de 31,25 m. Depois de atingir a altura de 20 m (ao fim de um segundo de ascensão), a bola continuará subindo durante 1,5 segundos mais, no fim dos quais descenderá durante 1,5 segundos até a altura de 20 m, atingindo o solo um segundo depois.

O problema de Euler

Stendhal, ao referir-se na sua *Autobiografia* ao seu tempo de estudante, escreveu o seguinte:

“Encontrei Euler em sua casa (do seu professor de matemática) com o seu problema dos ovos que uma camponesa levava ao mercado... Isto foi para mim uma descoberta. Compreendi o que significava usar a arma chamada álgebra. Mas que diabo!, ninguém me disse isso antes...”

Vamos ver a seguir um problema da *Introdução à Álgebra*, de Euler, que tão grande impressão causou em Stendhal.

Duas camponesas levaram um total de 100 ovos para o mercado. Uma delas tinha mais mercadoria mas recebeu por ela tanto dinheiro como a outra. Uma vez vendidos todos os ovos, a primeira camponesa disse à segunda: "Se eu tivesse trazido a mesma quantidade de ovos que tu, teria recebido 15 cruzeiros". A segunda respondeu: "E se eu tivesse vendido os ovos que tu tinhas, teria recebido $6\frac{2}{3}$ cruzeiros". Quantos ovos vendeu cada uma?

Solução

Suponhamos que a primeira camponesa tinha x ovos. A segunda teria $100 - x$. Se a primeira tivesse $100 - x$ ovos, receberia 15 cruzeiros. Isto significa que vendeu os ovos a $\frac{15}{100-x}$ cada um.

Desta mesma maneira, concluímos que a segunda camponesa vendeu os ovos a $6\frac{2}{3}$:
 $\therefore x = \frac{20}{3x}$ cada um.

Determinemos agora a importância obtida por cada camponesa.

A primeira:

$$x \cdot \frac{15}{100-x} = \frac{15x}{100-x} ,$$

e a segunda:

$$(100-x) \cdot \frac{20}{3x} = \frac{20(100-x)}{3x} .$$

Como ambas receberam o mesmo, podemos escrever

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x}.$$

Depois das transformações adequadas, teremos

$$x^2 + 160x - 8000 = 0,$$

de onde,

$$x_1 = 40 \quad \text{e} \quad x_2 = -200.$$

A raiz negativa carece de sentido no caso presente. O problema não tem mais do que uma solução: a primeira camponesa levou para o mercado 40 ovos e a segunda, 60.

Este problema pode ser resolvido mais rapidamente por um processo mais engenhoso, embora mais difícil.

Suponhamos que a segunda camponesa levou para o mercado k vezes mais ovos do que a primeira. Ambas receberam pela sua mercadoria a mesma importância em dinheiro. Isto significa que a primeira vendeu os ovos k vezes mais caro que a segunda. Se tivessem trocado a mercadoria, a primeira camponesa teria tido k vezes mais ovos que a segunda e os teria vendido k vezes mais caro, recebendo k^2 mais dinheiro que aquela. Logo, teremos

$$k^2 = 15:6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4},$$

de onde resulta que

$$k = \frac{2}{3}.$$

Agora só nos resta dividir os 100 ovos na proporção de 3 : 2. A primeira camponesa levou 40 ovos e a segunda, 60.

Os alto-falantes

Problema

Numa praça estão instalados treze alto-falantes distribuídos em dois conjuntos: um deles consta de quatro desses aparelhos e o outro de nove. A distância que separa os dois conjuntos é de 50 m. Onde deverá se colocar uma pessoa para que o som de ambos os conjuntos se ouça com igual intensidade?

Solução

Se designarmos por x a distância que separa o ponto procurado do conjunto de quatro alto-falantes, então a distância entre este e o outro conjunto será $50 - x$ (fig. 16).

Uma vez que a intensidade do som diminui proporcionalmente ao quadrado da distância, teremos a seguinte equação:

$$\frac{4}{9} = \frac{x^2}{(50-x)^2},$$

que se reduz a

$$x^2 + 80x - 2000 = 0.$$

Esta equação tem duas raízes

$$x_1 = 20, \quad x_2 = -100.$$

A raiz positiva responde à pergunta formulada no problema. O ponto procurado se situa a 20 metros de distância do conjunto de

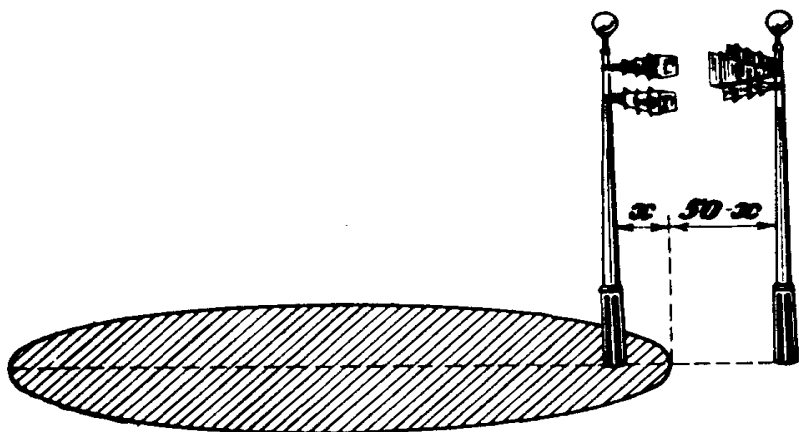


Fig. 16

quatro alto-falantes e, portanto, a 30 metros do conjunto de nove.

Mas o que significa a raiz negativa? Terá algum sentido?

Indubitavelmente. O sinal menos significa que o segundo ponto de audição igual se encontra em direção *oposta* ao ponto positivo que se tomou ao compor a equação.

Partindo do lugar ocupado pelo conjunto de quatro alto-falantes e na direção conveniente, chegaremos aos 100 m, ponto em que o som proveniente dos dois conjuntos se ouve com a mesma intensidade. Este ponto dista $100 + 50 = 150$ m do conjunto de nove alto-falantes.

Deste modo encontramos dois pontos de igual audição pertencentes à reta que passa

pelas fontes sonoras. Nesta linha não há mais pontos em que coincida a intensidade do som, mas fora dela, sim. Pode-se demonstrar que o lugar geométrico dos pontos que correspondem às condições do problema é a circunferência que passa pelos pontos encontrados como se eles fossem o extremo de um diâmetro. Esta circunferência, como vemos, limita um espaço bastante extenso (a parte tracejada da figura) dentro do qual a intensidade auditiva do conjunto de quatro alto-falantes é superior à do conjunto de nove alto-falantes. Fora do espaço indicado verifica-se o fenômeno oposto.

A álgebra do vôo à Lua

Do mesmo modo como foram encontrados os pontos de igual audição de dois conjuntos de auto-falantes, pode-se encontrar pontos de igual atração de um foguete cósmico por dois corpos celestes — a Terra e a Lua. Procuremos estes pontos.

De acordo com a lei de Newton, a força de atração recíproca de dois corpos é diretamente proporcional ao produto das massas que se atraem e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Se designarmos por M a massa da Terra e por x a distância entre ela e o foguete, a força com que a Terra atrai cada grama de massa do foguete se expressa por

$$\frac{Mk}{x^2},$$

onde k é a força de atração recíproca de um grama por um grama à distância de 1 cm.

A força com que a Lua atrai cada grama do foguete nesse mesmo ponto será

$$\frac{mk}{(l-x)^2},$$

onde m é a massa da Lua e l a distância que a separa da Terra (supõe-se que o foguete se encontra na reta que passa pelos centros da Terra e da Lua). O problema exige que

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l-x)^2},$$

isto é,

$$\frac{M}{m} = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}.$$

A relação $\frac{M}{m}$, de acordo com a astronomia, é aproximadamente igual a 81,5. Aplicando-a, teremos

$$\frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2} = 81,5,$$

de onde

$$80,5x^2 - 163,0lx + 81,5l^2 = 0.$$

Resolvendo a equação em relação a x , obteremos

$$x_1 = 0,9l, \quad x_2 = 1,12l.$$

Analogamente ao que sucedeu com o problema dos alto-falantes, chega-se à conclusão de que na reta que une a Terra à Lua existem dois pontos onde a atração de ambos os corpos celestes atua sobre o foguete com igual intensidade: um a 0,9 da distância que os separa, a partir do centro da Terra, e outro a 1,12 des-

sa mesma distância. Como a distância l entre os centros da Terra e da Lua é de aproximadamente 384 000 km, um dos pontos procurados encontra-se a 346 000 km da Terra e o outro a 430 000 km.

Já sabemos pelo problema anterior que essa mesma propriedade caracteriza todos os

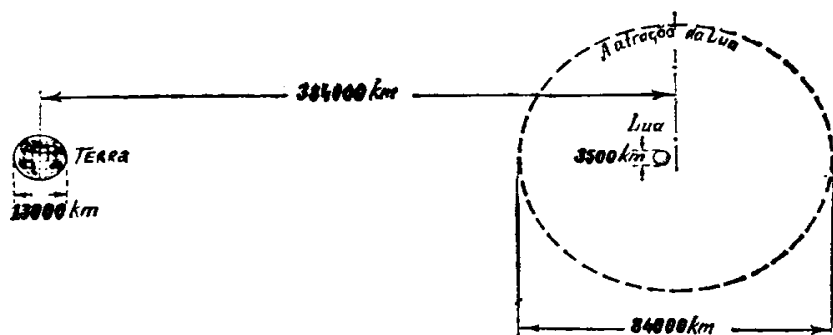


Fig. 17

pontos da circunferência que passa pelos pontos determinados, considerados como extremos de um diâmetro. Se fizermos girar essa circunferência, tomando como eixo de rotação a reta que une os centros da Terra e da Lua, esta descreverá uma superfície esférica cujos pontos correspondem às condições do problema.

O diâmetro dessa esfera, chamada “esfera de atração” da Lua (fig. 17), será igual a

$$1,12l - 0,9l = 0,22l \approx 84\,000 \text{ km.}$$

Muita gente pensa erroneamente que para acertar com um foguete na Lua basta fazê-lo alcançar a esfera de atração desta. À primeira

vista parece que se o foguete se encontrar dentro da esfera de atração (e a sua velocidade não for muito grande), ele deve forçosamente cair na superfície da Lua, visto que, nesse espaço, a força de atração da Lua supera a da Terra. Se fosse assim, a tarefa do vôo à Lua seria muito mais fácil, uma vez que não seria necessário apontar para a Lua, cujo diâmetro se vê no céu sob um ângulo de $1/2^\circ$, mas sim para um globo de 84 000 km de diâmetro, visto sob um ângulo de 12° .

Mas não é difícil demonstrar que tais raciocínios são errôneos.

Suponhamos que um foguete lançado da Terra para a Lua, perdendo necessariamente a sua velocidade por causa da atração terrestre, chegue à esfera de atração lunar, tendo a velocidade zero. Irá ele cair na Lua? De modo algum!

Em primeiro lugar, dentro da esfera de atração lunar há também a atração terrestre. Por isso ao lado da linha Terra — Lua a força de atração da Lua não irá só superar a força de atração terrestre, como também se somar a ela de acordo com a regra do paralelograma de forças dando uma resultante que não estará dirigida diretamente para a Lua (só na linha Terra — Lua esta força resultante seria dirigida diretamente para o centro da Lua).

Em segundo lugar (e isso é o principal), a Lua não é um alvo imóvel, e se quisermos saber como o foguete irá se mover em relação a ela (se irá ou não “cair” nela), teremos de levar em conta a velocidade do foguete em relação à Lua. Mas esta velocidade não é igual a

zero, pois a própria Lua se move em torno da Terra com a velocidade de 1 km/s. Por isso a velocidade do movimento do foguete em relação à Lua é demasiadamente grande para que esta possa atrair o foguete ou pelo menos detê-lo na esfera de sua atração como um satélite artificial.

Na realidade a atração da Lua começa a exercer influência considerável no movimento do foguete antes deste se aproximar da esfera de atração da Lua. Em balística celeste deve-se ter em conta a atração da Lua desde o momento em que o foguete chega à *esfera de influência da Lua*, cujo raio é de 66 000 km. Neste caso já se pode considerar o movimento do foguete em relação à Lua, esquecendo por completo da atração terrestre, mas, levando em consideração a velocidade exata (em relação à Lua) com que o foguete entra na esfera de influência da Lua. Por isso é natural que o foguete deva ser lançado para a Lua por uma trajetória que possa assegurar que a velocidade (em relação à Lua) de entrada na esfera de influência da Lua esteja dirigida diretamente para a Lua. Para isso a esfera de influência da Lua deve chocar-se com o foguete que se move ao seu encontro. Como se vê, não é tão fácil acertar a Lua como um globo de 84 000 km de diâmetro.

“Exercício complicado”

Nos países eslavos é muito conhecido o quadro *Exercício Complicado* (ano de 1895) de Bogdánov-Bélski, mas poucos pensam no con-

teúdo do “exercício complicado” que nele está representado. Ele consiste em fazer rápida e mentalmente o seguinte cálculo:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

O exercício, de fato, não é fácil. No entanto, os alunos do quadro resolveram-no facil-



Fig. 18

mente. Na figura, o pintor reproduziu S. Rat-chínski, professor russo de ciências naturais que abandonou a cátedra da Universidade para se

converter num simples professor primário rural. O inteligente pedagogo cultivava na sua escola o cálculo mental baseado num uso hábil das propriedades dos números. Os números 10, 11, 12, 13 e 14 têm esta propriedade curiosa: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

Como sabemos que $100 + 121 + 144 = 365$, é fácil calcular mentalmente que a expressão reproduzida no quadro é igual a 2.

A álgebra nos oferece os meios necessários para estabelecer com maior generalidade a interessante propriedade desta série de números. Será esta, por acaso, a única sequência de cinco números consecutivos em que a soma dos quadrados dos três primeiros é igual à soma dos quadrados dos outros dois?

Solução

Designando por x o primeiro dos números procurados, teremos a seguinte equação:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x + 4)^2.$$

Porém, é mais cômodo designar por x , não o primeiro dos números procurados, mas sim o *segundo*. Então a equação terá um aspecto mais simples:

$$(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 + (x + 3)^2.$$

Abrindo os parênteses e reduzindo os termos semelhantes, resulta:

$$x^2 - 10x - 11 = 0,$$

de onde

$$x = 5 \pm \sqrt{25 + 11}, \quad x_1 = 11, \quad x_2 = -1.$$

Existem, por conseguinte, duas séries de números que têm a propriedade exigida: a série de Ratchinski

10, 11, 12, 13 e 14

e a série

—2, —1, 0, 1, 2.

De fato,

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2.$$

Quais são os números

Problema

Encontrar três números consecutivos tais que o quadrado do número médio exceda numa unidade o produto dos outros dois.

Solução

Se o primeiro número é x , teremos a equação

$$(x + 1)^2 = x(x + 2) + 1.$$

Abrindo os parênteses, ficará

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

da qual não se pode tirar o valor de x . Isto mostra que a igualdade que formulamos é

uma *identidade*. E a identidade é efetiva não só quando as suas letras tomam um determinado valor, como sucede nas equações, mas sim para *qualquer* valor das mesmas. Por isso, três números consecutivos, *quaisquer* que sejam, possuem a referida propriedade. Consideremos três números ao acaso:

17, 18 e 19

e nos convenceremos de que

$$18^2 - 17 \cdot 19 = 324 - 323 = 1.$$

O inevitável desta relação se tornará mais evidente se expressarmos o *segundo* número por x . Então teremos a igualdade

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

isto é, uma identidade evidente.

Capítulo VII

O maior e o menor valor

$\approx 65^\circ$

Os problemas que apresentamos neste capítulo pertencem a uma classe muito interessante; com eles se propõe determinar o maior ou o menor valor de certa grandeza. Estes problemas podem ser resolvidos por processos diferentes, um dos quais indicamos a seguir.

P. Tchebychev, matemático russo, em sua obra *Delineação dos Mapas Geográficos* escreveu que os métodos científicos que permitem resolver um problema comum a toda a atividade prática do homem — como dispor dos seus meios para obter, na medida do possível, o maior proveito — têm uma importância especial.

Dois trens

Problema

Duas linhas férreas se cruzam, formando um ângulo reto. Dois trens se aproximam a grande velocidade do cruzamento, tendo um deles partido de uma estação situada a 40 km do cruzamento e o outro de uma estação que dista do

depois de x minutos os trens se encontram à menor distância entre si: $MN = m$. O trem que sai de B percorre $BM = 0,8x$, visto que num minuto percorre $800 \text{ m} = 0,8 \text{ km}$. Por conseguinte, $OM = 40 - 0,8x$. Do mesmo modo determinaremos que $ON = 50 - 0,6x$. De acordo com o teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} MN = m &= \sqrt{\overline{OM^2} + \overline{ON^2}} = \\ &= \sqrt{(40 - 0,8x)^2 + (50 - 0,6x)^2}, \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação

$$m = \sqrt{(40 - 0,8x)^2 + (50 - 0,6x)^2}$$

e passando todos os termos para o primeiro membro, teremos

$$x^2 - 124x + 4100 - m^2 = 0.$$

Resolvendo a equação, obteremos

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}.$$

Como x é o número que expressa os minutos decorridos e não pode ser imaginário, conclui-se que $m^2 - 256$ deve ser um número positivo ou pelo menos igual a zero. Este último caso é o que corresponde ao valor *mínimo* de m , e então

$$m^2 = 256, \text{ ou seja, } m = 16.$$

É evidente que m não pode ser menor que 16, visto que nesse caso x seria um número imaginário. E se $m^2 - 256 = 0$, $x = 62$.

Deste modo, as locomotivas chegam aos pontos em que se encontram à menor distân-

cia depois de 62 minutos e a distância que as separa é de 16 km.

Determinemos onde se encontrará cada uma delas no instante em que estão mais pró-

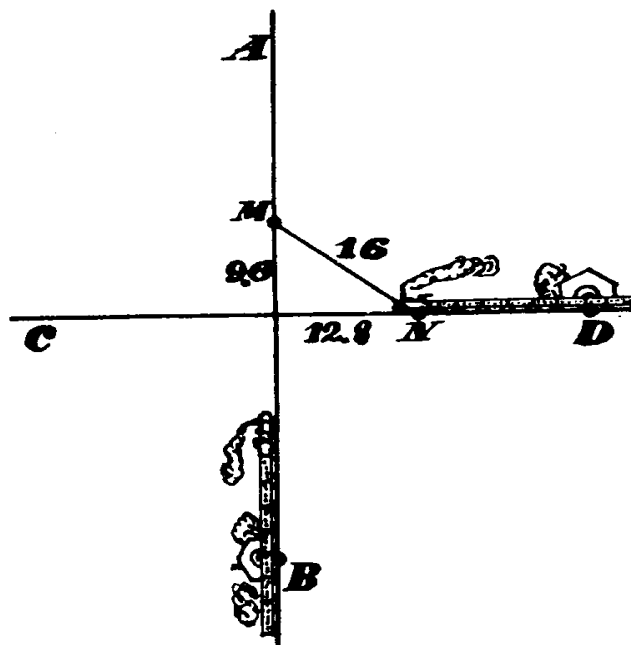


Fig. 20

ximas. Calculemos a distância OM ; ela é igual a

$$40 - 62 \cdot 0,8 = -9,6.$$

O sinal menos indica que a primeira locomotiva ultrapassará o cruzamento em 9,6 km. A distância ON será

$$50 - 62 \cdot 0,6 = 12,8.$$

isto é, à segunda locomotiva faltarão 12,8 km para chegar ao cruzamento. Na figura 20

vê-se a posição que as locomotivas ocupam no momento considerado. Podemos verificar que esta não é a que tínhamos imaginado no princípio. A equação foi tão tolerante que, apesar do erro do esquema, nos deu o resultado certo. Não é difícil averiguar de onde vem esta tolerância: ela se deve às regras algébricas dos sinais.

Onde construir o apeadeiro

Problema

A 20 km de uma ferrovia reta se encontra a povoação B (fig. 21). Onde devemos construir

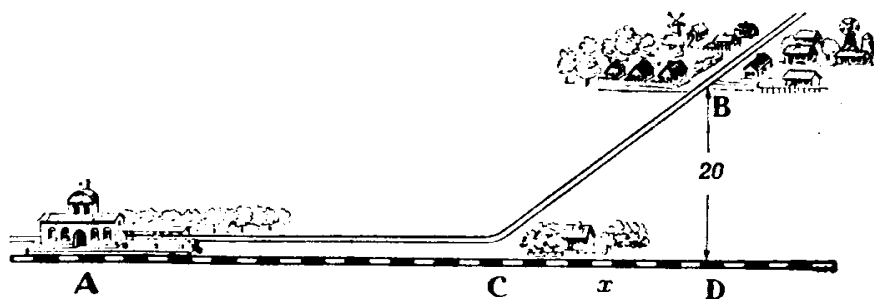


Fig. 21

o apeadeiro C para que na viagem de A para B pela ferrovia AC e pela rodovia CB se gaste o menor tempo possível? A velocidade pela ferrovia e pela rodovia é, respectivamente, de 0,8 e 0,2 km por minuto.

Solução

Designemos a distância AD (de A ao pé da perpendicular BD à horizontal AD) por a e CD por x . Então $AC = AD - CD = a - x$ e $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$.

O tempo gasto pelo trem para cobrir o trajeto AC será igual a

$$\frac{AC}{0,8} = \frac{a-x}{0,8}.$$

O tempo necessário para percorrer a distância CB na rodovia é

$$\frac{CB}{0,2} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2}.$$

A viagem de A para B demorará, no total,

$$\frac{a-x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2}.$$

Esta soma, que expressamos por m , deve ser a menor possível.

A equação:

$$\frac{a-x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2} = m$$

pode ser apresentada na forma:

$$- \frac{x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2} = m - \frac{a}{0,8}.$$

Multiplicando por 0,8, teremos

$$-x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} = 0,8m - a.$$

Substituindo $0,8m - a$ por k e fazendo desaparecer o radical, obteremos a equação do segundo grau

$$15x^2 + 2kx + 6400 - k^2 = 0,$$

de onde

$$x = \frac{k \pm \sqrt{16k^2 - 96\,000}}{15}.$$

Mas como $k = 0,8m - a$, quando m atinge o valor mínimo, o mesmo sucede com k e vice-versa *. Além disso, para que x seja real, é necessário que $16k^2$ não seja menor que 96 000. Portanto, o valor mínimo de $16k^2$ será 96 000. Por esta razão, m terá o menor valor quando $16k^2 = 96\,000$, isto é,

$$k = \sqrt{6000}.$$

Por conseguinte

$$x = \frac{k \pm 0}{15} = \frac{\sqrt{6000}}{15} \approx 5,16.$$

O apeadeiro deve ser construído aproximadamente a 5 km do ponto D , *qualquer que seja o comprimento* $a = AD$.

Contudo, é evidente que a solução deste problema só tem sentido no caso de $x < a$, pois ao equacionar este problema consideramos que a expressão $a - x$ tinha um valor positivo.

* Deve-se ter em conta que $k > 0$, porque

$$0,8m = a - x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} > a - x + x = a.$$

Se $x = a \approx 5,16$, não é necessário nenhum apeadeiro e deve-se ir pela rodovia até a estação. De modo idêntico se devia agir no caso da distância a ser inferior a 5,16 km.

Desta vez fomos nós que trabalhamos com maior prudência que a equação. Se tivéssemos confiado cegamente na equação, teríamos que construir o apeadeiro para lá da estação A , o que é completamente absurdo. Neste caso, $x > a$ e por isso o tempo

$$\frac{a-x}{0,8},$$

durante o qual teríamos que viajar de trem seria negativo. O caso é instrutivo e mostra que, quando nos servimos dos recursos matemáticos, temos que manter uma atitude prudente perante os resultados obtidos, recordando sempre que se não se cumprirem as condições nas quais se fundamenta o recurso matemático, o resultado pode perder todo o sentido.

Como traçar a estrada para o porto?

Problema

A partir da cidade ribeirinha A , temos que transportar carga para o ponto B , situado a a km mais abaixo e a d km da margem do rio (fig. 22). Como devemos traçar a estrada desde B até o rio de modo que o transporte de cargas de A para B se torne o mais barato possível,

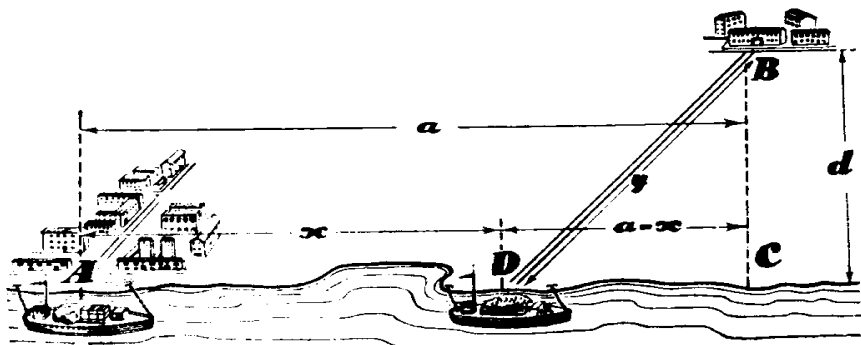


Fig. 22

considerando que o transporte de uma tonelada-quilômetro por rio custa a metade do que custaria por estrada?

Solução

Expressemos a distância AD por x e o comprimento da estrada DB por y . De acordo com as hipóteses, $AC = a$ e $BC = d$.

Uma vez que o transporte por estrada custa o dobro do transporte por rio, a soma

$$x + 2y$$

deve ser, de acordo com o que o problema exige, a menor possível. Expressemos-la por m . Daqui resulta a equação

$$x + 2y = m.$$

Mas $x = a - DC$ e $DC = \sqrt{y^2 - d^2}$. Então a equação terá a forma:

$$a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m.$$

Eliminando o radical, obtemos

$$3y^2 - 4(m - a)y + (m - a)^2 + d^2 = 0.$$

Resolvendo a equação, vem

$$y = \frac{2}{3}(m - a) \pm \frac{\sqrt{(m - a)^2 - 3d^2}}{3}.$$

Para que y satisfaça às condições dadas, $(m - a)^2$ não deve ser inferior a $3d^2$. O menor valor de $(m - a)^2$ é igual a $3d^2$. Assim:

$$m - a = d\sqrt{3}, \quad y = \frac{2(m - a) + 0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3};$$

sen $\angle BDC = d : y$, isto é,

$$\text{sen } \angle BDC = \frac{d}{y} = d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mas o ângulo cujo seno é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é 60° . Isto significa que a estrada deve ser traçada de modo a formar com o rio um ângulo de 60° independentemente da distância AC .

Aqui torna a aparecer a mesma particularidade do problema anterior. O resultado só tem sentido em determinadas condições. Se a povoação está situada de tal modo que a estrada (que forma um ângulo de 60° com o rio) passa pelo lado oposto da cidade A , então a solução encontrada é inaplicável. Neste caso tem-se que unir diretamente a povoação B com a cidade A por estrada sem usar o rio para o transporte.

Quando é que o produto alcança o seu valor máximo?

Para resolver muitos problemas relacionados com o “máximo e o mínimo”, isto é, para determinar o maior e o menor valor de uma grandeza variável, pode ser usado um teorema algébrico que examinaremos a seguir. Vejamos o seguinte problema:

Como dividir um número em duas partes para que o seu produto atinja o valor máximo?

Solução

Suponhamos que o número dado seja a . As partes em que se divide a são

$$\frac{a}{2} + x \quad \text{e} \quad \frac{a}{2} - x.$$

O número x indica a diferença destas partes em relação à metade de a . O produto delas será igual a

$$\left(\frac{a}{2} + x\right) \left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a^2}{4} - x^2.$$

É evidente que o produto das partes consideradas aumentará à medida que x diminuir, isto é, à medida que diminuir a diferença entre elas. O resultado será maior quando $x = 0$, isto é, quando ambas as partes forem iguais a $\frac{a}{2}$.

Portanto, o número deve ser dividido ao meio. O produto de dois números cuja soma

é constante atingirá o valor máximo quando estes números forem iguais entre si.

Vejamos agora o mesmo problema com três números.

Dividir um número em três partes de modo que o seu produto seja máximo.

Solução

Para resolver este problema vamos apoiar-nos no anterior.

Consideremos um número a dividido em três partes. Suponhamos previamente que nenhuma das três partes seja igual a $\frac{a}{3}$. Entre elas haverá uma parte maior que $\frac{a}{3}$ (as três não podem ser menores que $\frac{a}{3}$). Podemos expressar essa parte por

$$\frac{a}{3} + x.$$

Também haverá outra parte menor que $\frac{a}{3}$, que representaremos por

$$\frac{a}{3} - y$$

Os números x e y são positivos. A terceira parte será evidentemente igual a

$$\frac{a}{3} + y - x.$$

Os números $\frac{a}{3}$ e $\frac{a}{3} + x - y$ têm uma soma igual à das duas primeiras partes do número

a , mas a sua diferença, isto é, $x - y$, é menor que a diferença entre as duas primeiras partes, que era igual a $x + y$. Como vimos no problema anterior, o produto

$$\frac{a}{3} \left(\frac{a}{3} + x - y \right)$$

é maior que o produto das duas primeiras partes do número a .

Deste modo, se substituirmos as duas primeiras partes do número a pelos números

$$\frac{a}{3} \quad \text{e} \quad \frac{a}{3} + x - y,$$

deixando a terceira intata, o produto aumentará.

Suponhamos agora que uma das partes é igual a $\frac{a}{3}$. Então as outras duas partes serão

$$\frac{a}{3} + z \quad \text{e} \quad \frac{a}{3} - z.$$

Se estas duas partes forem iguais a $\frac{a}{3}$ (cuja soma, por isso, não se altera), o produto aumentará, sendo igual a

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}.$$

Por conseguinte, se o número a for dividido em três partes desiguais, o produto destas será menor que $\frac{a^3}{27}$, isto é, que o produto de três fatores *iguais* cuja soma seja a .

Do mesmo modo podemos demonstrar este teorema para *quatro* fatores, para *cinco*, etc.

Examinemos agora um caso mais geral.

Determinar o valor de x e de y para que a expressão $x^p y^q$ tenha o seu maior valor possível, sabendo-se que $x + y = a$.

Solução

Procuramos o valor de x para o qual a expressão

$$x^p (a - x)^q$$

atinge o seu valor máximo.

Multiplicando esta expressão por $\frac{1}{p^p q^q}$, obteremos a seguinte:

$$\frac{x^p}{p^p} \cdot \frac{(a-x)^q}{q^q},$$

que atingirá o seu valor máximo quando a expressão inicial atingir o seu.

A expressão obtida pode ser escrita na forma

$$\underbrace{\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \dots \frac{x}{p}}_{p \text{ vezes}} \dots \underbrace{\frac{a-x}{q} \cdot \frac{a-x}{q} \cdot \frac{a-x}{q} \dots \frac{a-x}{q}}_{q \text{ vezes}}$$

A soma de todos os fatores será igual a

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \dots + \frac{x}{p}}_{p \text{ vezes}} + \underbrace{\frac{a-x}{q} + \frac{a-x}{q} + \dots + \frac{a-x}{q}}_{q \text{ vezes}} = \\ & = \frac{px}{q} + \frac{q(a-x)}{q} = x + a - x = a, \end{aligned}$$

isto é, tem um valor constante.

Se nos basearmos no teorema demonstrado anteriormente (págs. 217—220) concluiremos que o produto

$$\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot \dots \cdot \frac{a-x}{q} \cdot \frac{a-x}{q} \cdot \frac{a-x}{q} \dots$$

atinge o valor máximo quando os seus fatores forem iguais, isto é, quando

$$\frac{x}{p} = \frac{a-x}{q}.$$

Sabemos que $a - x = y$. Substituindo o antecedente da segunda razão e alterando a ordem dos meios, obteremos

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}.$$

Deste modo, sendo $x + y$ constante, o produto $x^p y^q$ atinge o seu valor máximo quando $x : y = p : q$.

Seguindo um raciocínio semelhante, podemos demonstrar que os produtos $x^p y^q z^r$, $x^p y^{qq} z^r t^u$, etc.

atingem o seu valor máximo, sendo constantes as somas $x + y + z$, $x + y + z + t$, etc., quando

$$x : y : z = p : q : r,$$

$$x : y : z : t = p : q : r : u, \text{ etc.}$$

Qual será a menor soma?

O leitor que quizer abordar a demonstração de teoremas algébricos de valor prático, pode constatar por si próprio o seguinte princípio:

1. A soma de dois números cujo produto é invariável atinge o valor *mínimo* quando tais números são iguais.

Por exemplo, para o produto 36: $4 + 9 = 13$, $3 + 12 = 15$, $2 + 18 = 20$, $1 + 36 = 37$ e, por último, $6 + 6 = 12$.

2. A soma de vários números cujo produto é invariável será menor quando os valores dos números dados forem iguais.

Por exemplo, para o produto 216: $3 + 12 + 6 = 21$, $2 + 18 + 6 = 26$, $9 + 6 + 4 = 19$, enquanto que $6 + 6 + 6 = 18$.

Mostremos, com uma série de exemplos, como se aplicam na prática estes teoremas.

O tronco de volume máximo

Problema

De um tronco cilíndrico pretendemos obter uma viga de seção retangular de volume má-

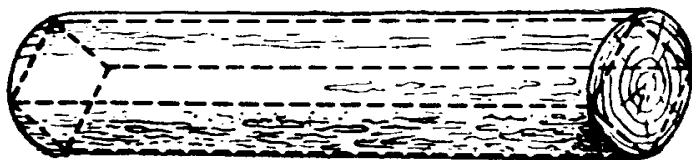


Fig. 23

ximo. Que forma deve ter a sua seção (fig. 23)?

Solução

De acordo com o teorema de Pitágoras, se os lados da seção retangular são x e y , tere-

mos:

$$x^2 + y^2 = d^2,$$

onde d é o diâmetro do tronco. O volume da viga será máximo quando a superfície da sua seção for também máxima, isto é, quando xy atingir o seu maior valor. Mas se xy atinge o seu valor máximo, também o atingirá x^2y^2 . E como a soma $x^2 + y^2$ é constante, o produto x^2y^2 será o maior possível, como demonstramos anteriormente, quando

$$x^2 = y^2, \quad \text{ou seja, } x = y.$$

Portanto, a seção da viga deve ser *quadrada*.

Duas parcelas de terra

Problema

1. Que forma deve ter uma parcela retangular de uma dada superfície para que o comprimento da sua cerca seja o menor possível?

2. Que forma deve ter uma parcela de terreno retangular para que, com um comprimento fixo da sua cerca, ela tenha a maior superfície possível?

Solução

1. A forma da parcela retangular é determinada pela relação entre os seus lados x e y . A superfície de um terreno cujos lados são x e y é igual a xy e o seu perímetro $2x + 2y$.

Este último será o menor possível se $x + y$ também o for.

Sendo constante o produto xy , a soma $x + y$ é a menor possível se $x = y$. Portanto, o retângulo que procuramos deve ser um quadrado.

2. Se x e y são os lados de um terreno retangular, o comprimento da sua cerca será $2x + 2y$ e a sua superfície, xy . Este produto será máximo quando o for o produto $4xy$, ou seja, $2x \cdot 2y$. Este último alcança o seu valor máximo (se a soma dos seus fatores, $2x + 2y$, for constante) quando $2x = 2y$, isto é, se o terreno for um quadrado.

As propriedades do quadrado, conhecidas da geometria, podemos acrescentar mais uma: o quadrado é, entre os retângulos, o que com uma dada superfície tem menor perímetro e com um perímetro dado tem a maior área.

O papagaio

Problema

Procurar construir um papagaio com a forma de um setor circular que tenha a maior área possível, partindo de um perímetro previamente dado.

Solução

Convencionadas as condições do problema, devemos determinar a relação entre o comprimento do arco do setor e o seu raio de modo

a obter a maior superfície possível sem alterar o perímetro dado.

Se o raio de um setor é x e o arco y , o perímetro l e a área S serão expressos do seguinte modo (fig. 24):

$$l = 2x + y, \quad S = \frac{xy}{2} = \frac{x(l - 2x)}{2}.$$

S atinge o seu valor máximo, quando o valor de x tornar máxima a expressão $2x(l - 2x)$,

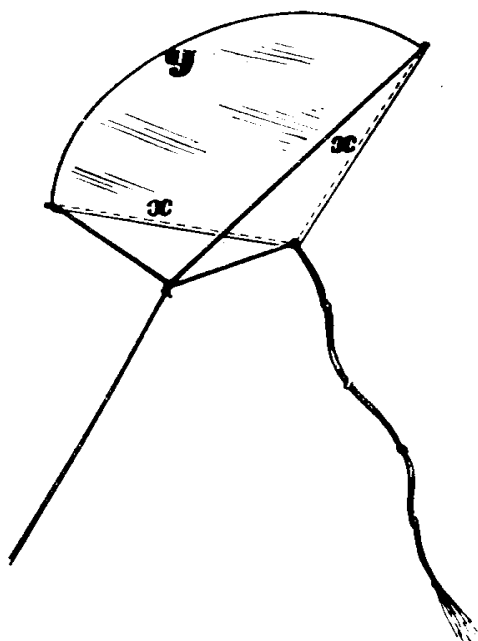


Fig. 24

ou seja, o quádruplo da superfície. E como a soma $2x + (l - 2x) = l$ é constante, o seu produto será maior quando $2x = l - 2x$,

isto é, quando

$$x = \frac{l}{4} ,$$

$$y = l - 2 \cdot \frac{l}{4} = \frac{l}{2} .$$

Deste modo, um setor circular com um dado perímetro tem a maior área quando o seu raio é metade do arco (isto é, o comprimento do arco é igual à soma dos 2 raios extremos, ou o comprimento da linha curva é igual ao comprimento da linha quebrada). O ângulo do setor circular é aproximadamente de 115° , ou seja, dois radianos. As qualidades de vôo de tal papagaio constituem uma questão estranha a este problema.

A construção de uma casa

Problema

No lugar onde se encontra uma casa em ruínas, que apenas tem em pé uma parede com 12 metros de comprimento, pretende-se construir um edifício aproveitando a parede existente. A área da nova casa deve ter 112 m^2 . As condições econômicas para a obra são:

1. A reparação de um metro da parede velha é equivalente a 25% do que custa levantar uma nova.

2. A demolição de um metro da parede velha e a construção de uma nova com tijolos

da velha atinge 50% do que custaria construí-la com material novo.

Em tais condições, qual será o modo mais vantajoso de aproveitar a parede velha?

Solução

Suponhamos que se conservam x metros de parede e que os restantes $12 - x$ são demolidos para, com o material recuperado, levantar uma parte da parede da futura casa

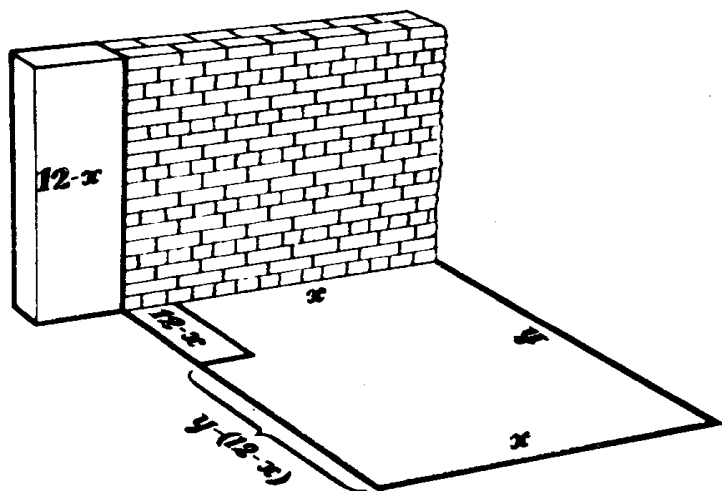


Fig. 25

(fig. 25). Se o valor de cada metro linear de parede feita com tijolos novos é igual a a , a reparação de x metros de parede custará $\frac{ax}{4}$; a construção dos $12 - x$ metros importará em $\frac{a(12-x)}{2}$; o resto da parede, $a[y - (12 - x)]$, isto é, $a(y + x - 12)$; a terceira parte da parede, ax , e a quarta, ay .

Toda a obra custará

$$\frac{ax}{4} + \frac{a(12-x)}{2} + a(y+x-12) + \\ + ax + ay = \frac{a(7x+8y)}{4} - 6a.$$

A última expressão atingirá o seu valor mínimo quando a soma $7x + 8y$ alcançar o seu valor mínimo.

Sabemos que a área da casa xy é igual a 112. Portanto,

$$7x \cdot 8y = 56 \cdot 112.$$

Como o produto é constante, a soma $7x + 8y$ atingirá o menor valor quando

$$7x = 8y,$$

de onde

$$y = \frac{7}{8}x,$$

Substituindo o valor de y na equação $xy = 112$, teremos

$$\frac{7}{8}x^2 = 112, \quad x = \sqrt[7]{128} \approx 11,3.$$

Deste modo, sendo o comprimento da parede antiga 12 m, deve-se demolir apenas 0,7 m dessa parede.

O terreno

Problema

Para construir uma casa de campo é necessário cercar o terreno destinado a esse fim. Conta-se com material para l metros de cerca.

Além disso, num dos lados do terreno pode ser usada uma cerca construída anteriormente. Nestas condições, como devemos cercar o terreno de modo a podermos abarcar a maior área possível?

Solução

Suponhamos que o comprimento do terreno é igual a x e a largura a y (perpendicular

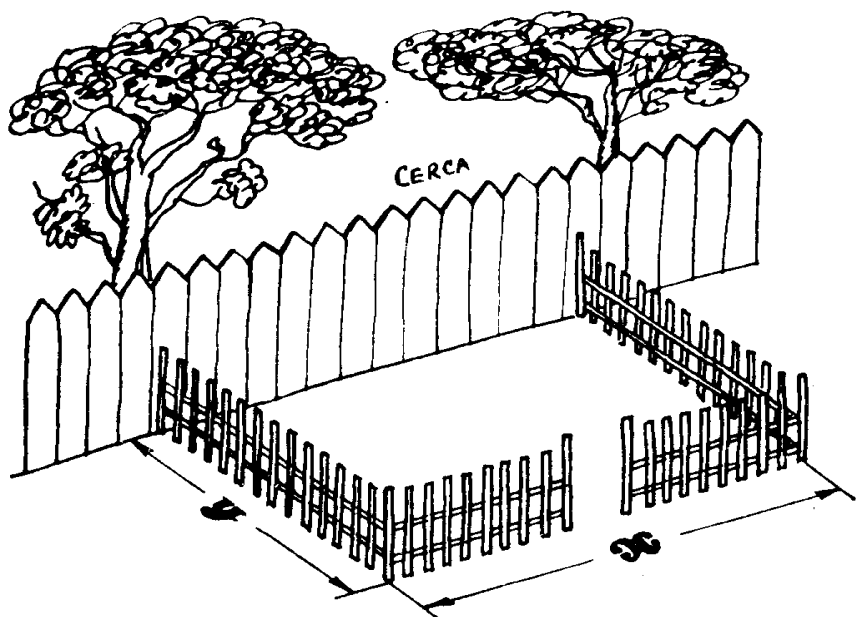


Fig. 26

ao primeiro) (fig. 26). Neste caso, para cercar este terreno são necessários $x + 2y$ metros de cerca, de forma que

$$x + 2y = l.$$

A área do terreno será
 $S = xy = y(l - 2y),$

que atingirá o seu valor máximo simultaneamente com
 $2y(l - 2y)$

(dobro da área), produto de 2 fatores, sendo l constante. Por isso, para obter a maior área possível, deve ter lugar a igualdade

$$2y = l - 2y,$$

de onde

$$y = \frac{l}{4}; \quad x = l - 2y = \frac{l}{2}.$$

Em outras palavras: $x = 2y$, isto é, o comprimento do terreno deve ser o dobro da largura.

A calha de seção máxima

Problema

Pretendemos dobrar em forma de calha uma folha de chapa metálica retangular (fig. 27). A sua seção deve ter a forma de um trapézio isósceles, o que pode ser conseguido de modos diversos, como se indica na figura 28. Qual deverá ser a largura dos flancos e que ângulo devem fazer com o fundo para que a seção da calha tenha a área máxima (fig. 29)?

Solução

Representemos por l a largura da folha, por x a das partes dobradas e por y a do fundo

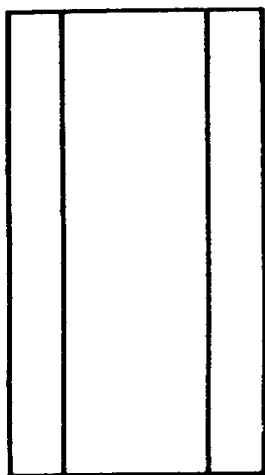


Fig. 27

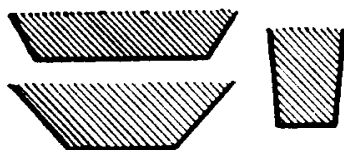


Fig. 28

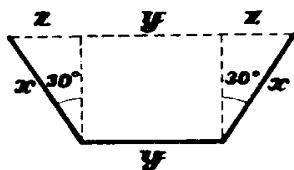


Fig. 29

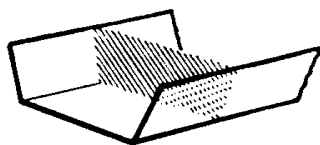


Fig. 30

da calha. Introduzamos mais uma medida, a incógnita z , cujo significado aparece com toda a clareza na figura 30.

A área do trapézio que representa a seção da calha será

$$S = \frac{(z + y + z) + y}{2} \sqrt{x^2 - z^2} = \\ = \sqrt{(y + z)^2 (x^2 - z^2)}.$$

O problema consiste em determinar quais devem ser os valores de x , y e z para que S atinja o seu maior valor, admitindo que a soma $2x + y$ (largura da folha) é uma constante l .

Passemos aos cálculos:

$$S^2 = (y + z)^2 (x + z) (x - z).$$

S^2 atingirá o seu valor máximo com os valores de x , y e z que o proporcionem também a $3S^2$. $3S^2$ pode ser apresentado assim, sob a forma de produto

$$(y + z) (y + z) (x + z) (3x - 3z).$$

A soma destes fatores será:

$$y + z + y + z + x + z + 3x - 3z = \\ = 2y + 4x = 2l,$$

isto é, esta soma é invariável. Portanto, o produto dos quatro fatores atingirá o máximo quando estes forem iguais entre si, isto é,

$$y + z = x + z \quad \text{e} \quad x + z = 3x - 3z.$$

Da primeira equação concluimos que $y = x$,

e como $y + 2x = l$, $x = y = \frac{l}{3}$.

Da segunda equação resulta:

$$z = \frac{x}{2} = \frac{l}{6}.$$

Como o cateto z é igual à metade da hipotenusa x (fig. 30), o ângulo oposto a este cateto será igual a 30° e o ângulo de inclinação das faces laterais será $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

Enfim, a calha terá a maior seção quando as suas faces tiverem a forma de três lados contíguos de um hexágono regular.

O funil de capacidade máxima

Problema

Pretendemos construir a parte cônica de um funil servindo-nos de um círculo de folha-de-flandres. Para isso cortamos um setor do círculo e com o resto construímos um cone (fig. 31). Quantos graus deve ter o arco do setor que foi cortado para que o funil tenha a maior capacidade possível?

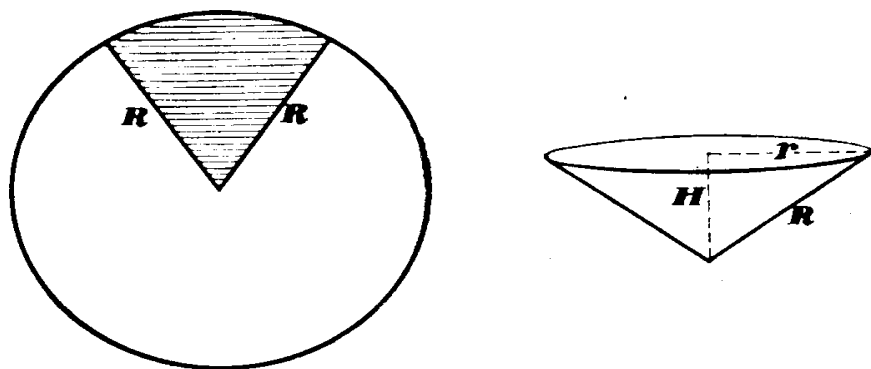


Fig. 31

Solução

Representamos por x (em unidades de comprimento) o arco da parte que se aproveita para formar o cone. Por conseguinte, a geratriz será o raio R do círculo da folha-de-flandres e o comprimento da circunferência da base será igual a x . O raio r da base do cone será determinado a partir da igualdade

$$2\pi r = x,$$

de onde

$$r = \frac{x}{2\pi}.$$

A altura do cone, usando o teorema de Pitágoras, será (fig. 31):

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

O volume deste cone é dado por

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Esta expressão atinge o seu valor máximo juntamente com a expressão

$$\left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2}$$

e com o seu quadrado

$$\left(\frac{x}{2\pi} \right)^4 \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \right].$$

E como

$$\left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 = R^2$$

é um valor constante, o último produto (como se demonstrou nas págs. 000—000) atinge o seu valor máximo quando x tiver um valor tal que

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 : \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2:1,$$

de onde

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 - 2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 \quad \text{e} \quad x = \frac{2\pi}{3} R \sqrt{6} \approx 5,15 R.$$

O arco x tem a amplitude de cerca de 295° e, por conseguinte, o arco do setor cortado será aproximadamente igual a 65° .

A iluminação de maior intensidade

Problema

A que altura da mesa se deve encontrar a chama de uma vela para que ilumine com a maior intensidade possível uma moeda colocada nessa mesa?

Solução

Pode parecer que, para conseguir o objetivo proposto, se deva colocar a chama o mais baixo possível. Isto não é certo. Nestas condições, os raios de luz caem muito oblíquos. Mas se elevarmos a vela para que os raios caiam mais na vertical, o foco de luz se afasta.

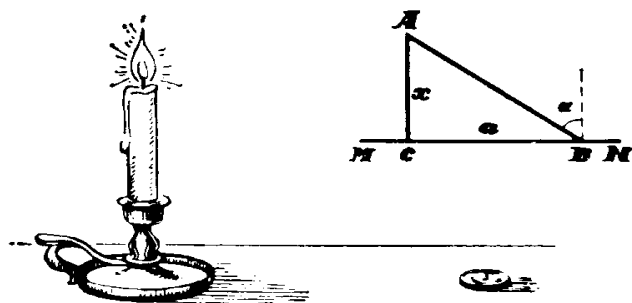


Fig. 32

Por isso a iluminação mais vantajosa é, sem dúvida, a que se efetua a partir de uma altura média. Designemos esta altura pela letra x (fig. 32), e por a a distância BC que medeia entre a moeda B e a base da perpendicular que passa pela chama A . Se a claridade da chama for i , de acordo com as leis da ótica, a luminosidade será expressa por

$$\frac{i}{AB^2} \cos \alpha = \alpha \frac{i \cos \alpha}{(\sqrt{a^2 + x^2})^2} = \frac{i \cos \alpha}{a^2 + x^2},$$

onde α é o ângulo de incidência dos raios AB . E como

$$\cos \alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

a luminosidade será

$$\frac{i}{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{ix}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Esta expressão atinge o seu valor máximo quando, sem variar x , o seu quadrado adqui-

rir também o seu maior valor

$$\frac{i^2 x^2}{(a^2 + x^2)^3}.$$

Omitamos o fator i^2 , dado o seu valor constante, e transformemos o resto da expressão em causa do modo seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(a^2 + x^2)^3} &= \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right).\end{aligned}$$

A expressão transformada alcança o seu maior valor quando o atingir também a expressão

$$\left(\frac{a^2}{x^2 + a^2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right),$$

visto que o fator constante introduzido, a^4 , não influi no valor de x com o qual o produto atinge o seu valor máximo. Partindo de que a soma das primeiras potências destes fatores

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} + \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right) = 1$$

é um valor constante, deduz-se que o produto estudado alcança o seu valor máximo quando

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} : \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right) = 2:1$$

(vejam-se as págs. 220—221).

Temos então a equação

$$a^2 = 2x^2 + 2a^2 - 2a^2,$$

que terá como solução

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0,71 a.$$

A moeda será iluminada com maior intensidade quando o foco de luz se encontrar a uma altura de 0,71 da distância entre a projeção do foco luminoso e a moeda. O conhecimento desta correlação ajudará a instalar mais corretamente a iluminação nos locais de trabalho.

Capítulo VIII

Progressões

$$1\frac{2}{3}; 10\frac{5}{6}; 20; 29\frac{1}{6}; 38\frac{1}{3}$$

A mais antiga progressão

Problema

O problema de progressões mais antigo não é o da recompensa ao inventor do xadrez, que já tem mais de dois mil anos, mas um outro muito mais velho, registrado no célebre papiro egípcio de Rind. Este papiro, encontrado por Rind no final do século passado, foi escrito uns dois mil anos antes da nossa era e constitui uma cópia de outra obra matemática ainda mais antiga, que data possivelmente do terceiro milênio antes da nossa era. Entre os problemas aritméticos, algébricos e geométricos que figuram em tal documento aparece o que indicamos a seguir em tradução livre.

Cinco pessoas repartiram entre si cem medidas de trigo de tal modo que a segunda recebeu mais do que a primeira tanto, quanto coube à terceira mais do que à segunda, a quarta mais do que a terceira e a quinta mais do que a quarta. Além disso, as duas primeiras receberam sete vezes menos que as três restantes. Quanto recebeu cada uma?



Fig. 33

Solução

É evidente que as quantidades de trigo distribuídas entre os cinco participantes da divisão constituem uma progressão aritmética crescente. Suponhamos que o primeiro termo é x e a razão y . Neste caso teremos

parte que coube à primeira		x
» » » » segunda		$x + y$
» » » » terceira		$x + 2y$
» » » » quarta		$x + 3y$
» » » » quinta		$x + 4y$.

De acordo com as premissas do problema, podemos estabelecer as seguintes equações:

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + \\ \quad + (x + 4y) = 100, \\ 7[x + (x + y)] = (x + 2y) + \\ \quad + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

Depois de reduzir os termos semelhantes e simplificar, a primeira equação será

$$x + 2y = 20,$$

e a segunda

$$11x = 2y.$$

Resolvendo este sistema, obteremos

$$x = 1 \frac{2}{3}, \quad y = 9 \frac{1}{6}.$$

Por conseguinte, o trigo deve ser repartido do modo seguinte:

$$1 \frac{2}{3}, \quad 10 \frac{5}{6}, \quad 20, \quad 29 \frac{1}{6}, \quad 38 \frac{1}{3}.$$

Álgebra em papel quadriculado

Problema

Apesar deste problema de progressões ter já 50 séculos de existência, nos programas escolares a progressão apareceu há relativamente pouco tempo. Ainda que no manual de Magnitski, publicado há duzentos anos e usado como livro de texto nas escolas da Rússia du-

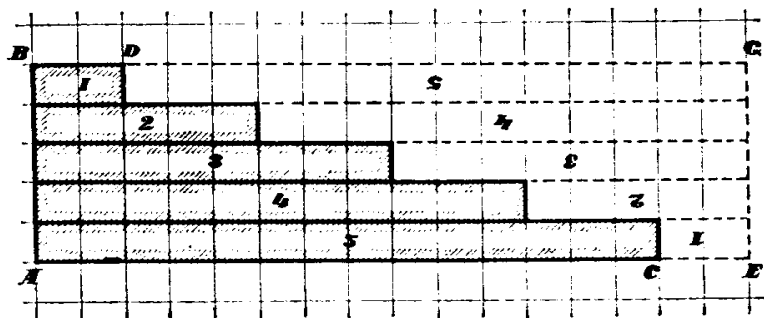


Fig. 34

rante meio século, se estudem as progressões, não se dão as fórmulas gerais que relacionam os valores que figuram nas mesmas. Por esta razão, o próprio autor só consegue êxitos nestes problemas à custa de grandes esforços. E, no entanto, a fórmula dos termos de uma progressão aritmética pode ser deduzida por um processo simples e gráfico, usando para isso papel quadriculado. Neste, qualquer progressão aritmética pode ser expressa por meio de uma figura em escada. Por exemplo, a figura $ABCD$ (fig. 34) representa a progressão 2; 5; 8; 11; 14.

Para determinar a soma dos termos, completamos o desenho de modo a formar o retângulo $ABGE$ e obteremos duas figuras iguais: $ABDC$ e $DGEC$. A área de cada uma delas representa a soma dos termos da nossa progressão. Daqui conclui-se que o dobro da soma dos termos da progressão é igual a área do retângulo $ABGE$, isto é,

$$(AC + CE) \cdot AB.$$

Mas $AC + CE$ representa a soma do 1.º termo da progressão com o 5.º e AB , o número de termos da progressão. Por isso, designando a soma dos termos da progressão por S , podemos afirmar que

$$2S = (\text{soma do primeiro e último termos}) \cdot (\text{número de termos}),$$

ou

$$S = \frac{(\text{primeiro termo} + \text{último termo}) \cdot (\text{número de termos})}{2}.$$

A rega da horta

Problema

Numa horta, há 30 canteiros tendo cada um deles 16 m de comprimento por 2,5 m de largura. Durante a rega o hortelão leva dois baldes de água desde um poço situado a 14 metros do extremo da horta e (fig. 35) dá volta ao canteiro pelo rego. A água levada de cada vez dá para regar apenas um canteiro.

Qual é o comprimento do caminho percorrido pelo hortelão para regar a horta toda? O caminho começa e termina no poço.

Solução

Para regar o primeiro canteiro, o hortelão tem que percorrer um caminho igual a

$$14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14 = 65 \text{ m.}$$



Fig. 35

Para regar o segundo, percorre

$$14 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 14 = \\ = 65 + 5 = 70 \text{ m.}$$

Cada novo canteiro exige que o hortelão ande mais 5 metros do que andou para o anterior. Então teremos a seguinte progressão:

$$65; 70; 75; \dots; 65 + 5 \cdot 29.$$

A soma dos seus termos será

$$\frac{(65 + 65 + 29 \cdot 5) 30}{2} = 4125 \text{ m.}$$

Para regar a horta toda o hortelão precisa percorrer 4,125 km.

A comida para as galinhas

Problema

Para 31 galinhas foi preparada uma certa reserva de comida à base de um decalitro semanal para cada uma. Isto foi feito supondo que o número de galinhas permanecia constante. Mas como em cada semana o número de aves diminuía em uma unidade, a comida preparada durou o dobro do tempo previsto.

Que quantidade de comida prepararam e para quanto tempo foi planejada?

Solução

Suponhamos que a reserva era de x decalitros de comida para y semanas. Como o alimento foi calculado para 31 galinhas à razão de um decalitro por cabeça e por semana, resulta que

$$x = 31y.$$

Na primeira semana foram consumidos 31 dl, na segunda, 30, na terceira, 29, e assim sucessivamente, até a última semana do dobro do tempo previsto quando foram con-

sumidos

$$(31 - 2y + 1) \text{ dl } *.$$

A reserva seria, por conseguinte, de
 $x = 31y =$

$$= 31 + 30 + 29 + \dots + (31 - 2y + 1).$$

A soma dos $2y$ termos da progressão, o primeiro dos quais é 31 e o último $31 - 2y + 1$, será igual a

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1) 2y}{2} = (63 - 2y) y.$$

E como y não pode ser igual a zero, podemos dividir por y ambos os membros da igualdade. Obtemos

$$31 = 63 - 2y \quad \text{e} \quad y = 16,$$

de onde

$$x = 31y = 496.$$

Foram preparados 496 dl de comida para 16 semanas.

A equipe de cavadores

Problema

Contratou-se uma equipe de cavadores para abrir uma vala. Se toda a equipe tivesse trabalhado, a vala ficaria pronta em 24 horas.

* O consumo foi:

$$1.^a \text{ semana} = 31 \text{ dl},$$

$$2.^a \quad \gg \quad = 31 - 1 \text{ dl},$$

$$3.^a \quad \gg \quad = 31 - 2 \text{ dl},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2y.^a \quad \gg \quad = 31 - (2y - 1) = 31 - 2y + 1 \text{ dl}.$$

Mas o trabalho foi iniciado por um único trabalhador. Pouco depois juntou-se-lhe outro, mais tarde um terceiro, passado algum tempo igual um quarto e assim sucessivamente até o último. Quando se fez o balanço do trabalho efetuado, verificou-se que o primeiro tinha gasto no trabalho onze vezes mais tempo que o último. Quanto tempo trabalhou este último?

Solução

Suponhamos que o último cavador trabalhou x horas. Sendo assim, o primeiro trabalhou $11x$ horas. Continuemos. Se o número de elementos da equipe é y , o número total de horas de trabalho se determina como sendo uma soma de y termos de uma progressão aritmética decrescente, cujo primeiro termo é $11x$ e o último x , isto é,

$$\frac{(11x + x)y}{2} = 6xy.$$

Sabemos também que a equipe, composta por y pessoas, trabalhando simultaneamente terminaria a vala em 24 horas, o que quer dizer que para realizar essa obra são necessárias $24y$ horas de trabalho. Logo

$$6xy = 24y.$$

Como y não é igual a zero, a equação pode ser simplificada, dividindo-se ambos os membros por este fator, depois do que obteremos $6x = 24$ ou $x = 4$.

Assim, o último cavador trabalhou 4 horas. Respondemos à pergunta do problema,

mas se quiséssemos saber o número de trabalhadores que fazem parte da equipe, não poderíamos determiná-lo, ainda que na equação figure esse número designado por y . Não temos dados suficientes para resolver esta equação.

As maçãs

Problema

Um fruticultor vendeu ao primeiro dos seus fregueses metade das maçãs de seu pomar mais meia maçã. Ao segundo vendeu metade das restantes mais meia maçã. Ao terceiro, metade das que ficaram mais meia maçã, etc. O sétimo freguês levou metade das que ficaram mais meia maçã esgotando assim a mercadoria. Quantas maçãs tinha o fruticultor?

Solução

Se o número inicial de maçãs era x , o primeiro freguês adquiriu

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2},$$

o segundo

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{x+1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^2},$$

o terceiro

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^3},$$

e o sétimo

$$\frac{x+1}{2^7}.$$

Temos a equação

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2^2} + \frac{x+1}{2^3} + \dots + \frac{x+1}{2^7} = x,$$

ou seja,

$$(x+1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^7} \right) = x.$$

Determinada a soma dos termos da progressão geométrica entre parênteses, obtemos

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{2^7} \quad \text{e} \quad x = 2^7 - 1 = 127.$$

O fruticultor tinha 127 maçãs.

A compra do cavalo

Problema

Na aritmética de Magnítski encontramos um problema muito interessante que transcrevemos sem nos sujeitarmos à linguagem do original.

Certa pessoa vendeu o seu cavalo por 156 rublos. Mas o comprador se arrependeu de tê-lo adquirido e o devolveu dizendo:

— Não me interessa comprar o cavalo por esse preço, porque ele não vale tanto.

O vendedor propôs novas condições:

— Se o preço lhe parece elevado, compre apenas os cravos das suas ferraduras e terá

o cavalo de graça. Cada ferradura tem seis cravos. Pelo primeiro pagará apenas $\frac{1}{4}$ de kopek, meio kopek pelo segundo, um kopek pelo terceiro, etc.

O comprador, deslumbrado com as novas condições e com a possibilidade de ficar com o cavalo de graça, aceitou a proposta, certo de que não teria de pagar mais de 10 rublos pelos cravos.

Qual foi a importância da compra?

Solução

Pelos 24 cravos teve que pagar

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{24-3} \text{ kop.},$$

cuja soma é igual a

$$\frac{2^{21} \cdot 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4\,194\,303 \frac{3}{4} \text{ kop.},$$

isto é, cerca de 42 000 rublos. Em tais condições, não dá pena entregar o cavalo de graça.

A recompensa do soldado

Problema

Num antigo manual russo de matemática que tem o pomposo título de *Curso completo de matemática pura elaborado por Efim Voitiakhóvski, cadete de artilharia e professor particular, para uso e proveito da juventude*

e quantos se exercitam em matemática (1795), lê-se o seguinte problema:

“Um soldado veterano recebe como recompensa 1 kopek pela primeira ferida que sofra, 2 pela segunda, 4 pela terceira, etc. Quando se fez o balanço, o soldado foi recompensado com 655 rublos e 35 kopeks. Deseja-se saber o número de feridas do soldado”.

Solução

Compomos a equação

$$65\ 535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{x-1},$$

ou

$$65\ 535 = \frac{2^{x-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1.$$

Daqui resulta

$$65\ 535 = 2^x, \quad \text{ou seja,} \quad x = 16,$$

resultado que obtemos facilmente por tentativas.

Com este generoso sistema de recompensa, o soldado devia ser ferido 16 vezes e permanecer vivo, para conseguir obter 655 rublos e 35 kopeks.

Capítulo IX

A sétima operação matemática



A sétima operação

Como dissemos, a quinta operação — a potenciação — tem duas operações inversas. Se

$$a^b = c,$$

a determinação de a será uma das operações inversas: a extração da raiz. Para determinar b , recorreremos à outra, à determinação do logaritmo.

Suponho que o leitor conheça as noções de logaritmos correspondentes a um curso escolar. Para ele não representará nenhuma dificuldade determinar, por exemplo, a que é igual

$$a^{\log_a b}.$$

É fácil compreender que, se a base do logaritmo a for elevada a um expoente igual ao logaritmo do número b , se obterá o número b .

Os logaritmos foram inventados para acelerar e simplificar o cálculo. Neper, inventor das primeiras tábuas de logaritmos, referia-se assim ao propósito que o animava:

“Na medida das minhas capacidades, propunha-me evitar as difíceis e aborrecidas ope-

rações de cálculo, que geralmente assustam muitos dos que se dedicam ao estudo da matemática”.

De fato, os logaritmos facilitam e aceleram em elevado grau os cálculos, sem falar já no fato de permitirem realizar operações que seriam extremamente complexas se não os aplicássemos (extração de raízes de qualquer índice).

Laplace escreveu com toda a razão que “com a redução do trabalho de vários meses de cálculo a poucos dias, a invenção dos logaritmos parece ter duplicado a vida dos astrônomos”. O famoso matemático referia-se aos astrônomos visto que esses são obrigados a fazer cálculos esgotantes e bastante complexos. Mas as suas palavras podem ser aplicadas com pleno direito a todos os que operam com números.

A nós, acostumados ao uso dos logaritmos e ao alívio que proporcionam, nos é difícil compreender o assombro e admiração que ocasionou a sua aplicação. Briggs, contemporâneo de Neper e mais tarde célebre pela sua invenção dos logaritmos decimais, escreveu ao receber a obra deste: “Com os seus novos e assombrosos logaritmos, Neper me obrigou a trabalhar intensamente com a cabeça e com as mãos. Espero vê-lo este verão, pois jamais li um livro que tanto me agradasse e espantasse”. Briggs realizou esse desejo, dirigindo-se à Escócia para visitar o inventor dos logaritmos. Quando se encontraram, Briggs disse:

“Empreendi esta longa viagem exclusivamente para o ver e saber de que engenhoso

recurso se serviu e de que arte se valeu para conceber este recurso admirável para os astrônomos: os logaritmos. Aliás, o que agora mais me surpreende é que ninguém os tivesse descoberto antes, tão simples parecem depois de se conhecerem”.

Os rivais dos logaritmos

Antes de se ter inventado os logaritmos, a necessidade de acelerar as operações fez surgir tabelas de outro gênero, mediante as quais a multiplicação se substituía pela subtração e não pela soma.

Tais tabelas baseavam-se na identidade

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4},$$

cujá veracidade é fácil de comprovar abrindo os parênteses.

Dispondo de quartos de quadrados, pode-se encontrar o produto de dois números sem multiplicá-los. Basta subtrair de um quarto do quadrado da soma destes números um quarto do quadrado da sua diferença. Essas tabelas também facilitavam a elevação ao quadrado e a extração da raiz quadrada. A tabela dos números inversos permitia simplificar também a divisão.

A superioridade destas tabelas sobre as tábuas de logaritmos consiste no fato de, graças a elas, se obterem resultados *exatos*, e não aproximados. No entanto, cedem perante aquelas no que diz respeito a muitas pro-

priedades que na prática são mais importantes. Se as tabelas das quartas partes dos quadrados permitem a multiplicação somente de *dois* números, os logaritmos, pelo contrário, tornam possível determinar *simultaneamente* o produto de quantos fatores se queira e, além disso, a potenciação de *qualquer* grau e as raízes de *qualquer* índice (inteiro ou fracionário). Os problemas de juros compostos não podem ser resolvidos com tabelas de quartos de quadrados.

Apesar disto continuaram sendo publicadas tabelas de quartos de quadrados mesmo depois de aparecerem os logaritmos de todas as espécies. Em 1856 foram editadas na França umas tabelas intituladas *Tabela dos quadrados dos logaritmos de 1 a 1000 milhões, com a ajuda das quais se determina o produto de números mediante um sistema extremamente simples e mais cômodo que o dos logaritmos. Composta por Alexandre Cossar*".

Esta idéia ocorre a muitos que não suspeitam que já está ultrapassada. Por duas vezes dirigiram-se a mim inventores de tabelas semelhantes julgando tratar-se de uma novidade e ficaram admitados ao saber que a sua invenção datava de há três séculos.

Outro dos rivais dos logaritmos, ainda que mais jovem, são as tabelas de cálculo que figuram em muitos manuais técnicos de consulta. Trata-se de tabelas gerais que contêm as seguintes colunas: quadrados e cubos, raízes quadradas e cúbicas, números inversos, comprimentos de circunferências e áreas de círculos para números de 2 a 1000. Estas tabelas, fre-

qüentemente cômodas para uma série de cálculos técnicos, são insuficientes: as de logaritmos têm um campo de aplicação consideravelmente mais extenso.

A evolução das tábuas de logaritmos

Até há pouco, em muitas escolas se usavam tabelas de logaritmos de cinco decimais. Atualmente passou-se para as de quatro decimais, visto cobrirem as necessidades dos cálculos técnicos. Mas para a maioria das necessidades práticas são mais do que suficientes as mantissas de 2 algarismos, já que as medições comuns raramente requerem maior aproximação.

O uso de mantissas com poucos algarismos é bastante recente. Recordo os tempos em que muitas escolas usavam as volumosas tábuas de sete decimais, que foram substituídas pelas de cinco depois de muito esforço. Mesmo as tábuas de logaritmos de sete algarismos foram consideradas uma novidade inadmissível, quando apareceram em 1794. As primeiras tábuas de logaritmos decimais, da autoria do matemático inglês Henry Briggs, em 1624, tinham quatorze decimais. Anos depois, Andrian Vlack, matemático holandês, reduziu as suas tábuas a dez decimais.

Como vemos, a evolução das tábuas usuais de logaritmos fez-se num sentido restritivo, passando de mantissas com muitos algarismos a outras mais curtas, processo que não terminou ainda em nossos dias, porque há ainda

quem não compreenda que a precisão nos cálculos não pode superar a exatidão.

A redução das mantissas acarreta duas importantes conseqüências práticas: 1) a sensível diminuição do volume das tábuas e 2) a correspondente simplificação do seu emprego e, por conseguinte, a brevidade dos cálculos que se efetuam com elas. As tábuas de sete decimais ocupam cerca de 200 páginas de formato grande; as de cinco, 30 páginas cujo formato é metade do das anteriores; as de quatro decimais ocupam um espaço dez vezes menor, reduzindo-se a duas páginas quando se imprimem em formato grande, e as de três podem ser limitadas a uma única página.

E quanto à rapidez nas operações, os cálculos com as tábuas de cinco decimais requerem a terça parte do tempo que se levaria operando com as de sete.

Curiosidades logarítmicas

Se as tábuas de três ou quatro decimais satisfazem completamente as necessidades logarítmicas da vida prática e os cálculos técnicos, os investigadores teóricos, pelo contrário, vêem-se obrigados a usar tábuas inclusive maiores do que as de quatorze decimais de Briggs. Na realidade, os logaritmos são, na maioria dos casos, números irracionais que não podem ser expressos exatamente por mais algarismos que tenham: os logaritmos da maioria dos números são expressos apenas aproxi-

madamente, aumentando a sua exatidão à medida que se tomam mais algarismos para a mantissa. Nos cálculos científicos, há ocasiões em que são insuficientes as tábuas de quatorze decimais *, mas entre os quinhentos tipos de tábuas logarítmicas publicadas desde que foram inventadas, o investigador pode encontrar sempre as que o satisfaçam. Recordemos, por exemplo, as tábuas de vinte decimais para os números de 2 a 1200 publicadas na França por Jean Callet (1795). Para um conjunto de números ainda mais limitado há tabelas com uma enorme quantidade de decimais, cuja existência, como pude comprovar, era desconhecida de muitos matemáticos.

Eis aqui essas tábuas gigantes, todas elas de logaritmos neperianos**:

as tábuas de 48 decimais de Wolfram, para números inferiores a 10 000.

as tábuas de 61 decimais, de Sharp.

as tábuas de 102 decimais, de Parkhurst, e, por último, a ultra curiosidade logarítmica:

as tábuas de 260 decimais, de Adams.

Aliás, neste último caso temos, não uma tábua, mas sim os logaritmos naturais de cinco números: 2, 3, 5, 7 e 10 e o inverso (com 260 decimais) para convertê-los em logaritmos decimais. Mas não é difícil compreen-

* As tábuas de logaritmos de 14 decimais, de Briggs, compreendem apenas os números de 1 a 20 000 e de 90 000 a 101 000.

** Chamam-se *neperianos* ou *naturais* os logaritmos que, diferentemente dos decimais, cuja base é 10, têm como base o número 2,718 ..., a que nos referiremos mais adiante.

der que dispondo dos logaritmos destes cinco números, com uma simples adição ou multiplicação, pode-se obter o logaritmo de uma infinidade de números compostos; por exemplo, o logaritmo de 12 é igual à soma dos logaritmos de 2, 2 e 3, etc.

Como curiosidade logarítmica, poderíamos citar as régua de cálculo, "logaritmos de madeira", se elas não se tivessem transformado, devido à sua comodidade, em instrumento de cálculo comum entre os técnicos, como os ábacos decimais que os contabilistas usam em diversos países. Como estamos acostumados com ele, já não nos espanta este instrumento, baseado no princípio dos logaritmos, ainda que os que o usam possam desconhecer este fato.

Os logaritmos em cena

O truque mais surpreendente de todos quantos foram apresentados perante o público por calculadores profissionais é, sem dúvida, o seguinte:

Conhecedor, através da publicidade, de que um calculador notável se propunha extrair de memória raízes de índices elevados de números muito grandes, o leitor prepara em casa, pacientemente, a 31.^a potência de um determinado número e procura fazer fracassar o calculador com o seu enorme número de 35 algarismos. No momento oportuno dirige-se ao calculador, dizendo-lhe as seguintes palavras:

— Experimente extrair a raiz de índice 21 do seguinte número de 35 algarismos. Tome nota que vou dizer o número.

O calculador pega no giz, mas antes de o leitor pronunciar o primeiro algarismo, ele já determinou o resultado: 13.

O calculador, sem saber o número, extrai a sua raiz de índice 31! Fê-lo de memória e, acrescente-se, com a rapidez de um relâmpago!...

O leitor ficará maravilhado e desalentado, ainda que não tenha acontecido nada de extraordinário. O segredo reside em que não existe mais do que *um* número, precisamente o 13, que elevado ao expoente 31, dê um resultado de 35 algarismos. Os números menores que 13 dão menos de 35 algarismos e os maiores, mais.

Como é que o calculador sabia isso? Como determinou o número 13? Serviu-se dos logaritmos, de logaritmos com mantissas de dois decimais que sabe de cor para os primeiros 15 ou 20 números. Aprendê-los não é tão difícil como parece, sobretudo se tivermos em conta que o logaritmo de um número composto é igual à soma dos logaritmos dos seus fatores primos. Sabendo de cor os logaritmos de 2, 3 e 7 *, conhecem-se os logaritmos correspondentes aos primeiros números. Para saber os da segunda dezena (de 10 a 20), teremos que saber de cor os logaritmos de quatro outros números.

Para qualquer calculador profissional é fácil reter na memória a seguinte tabela de logaritmos de 2 decimais:

* Recordemos que $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$.

Números	Log	Números	Log
2	0,30	11	1,04
3	0,48	12	1,08
4	0,60	13	1,11
5	0,70	14	1,15
6	0,78	15	1,18
7	0,85	16	1,20
8	0,90	17	1,23
9	0,95	18	1,26
		19	1,28

O truque matemático que nos deixou perplexos consiste no seguinte:

$$\log \sqrt[31]{(36 \text{ algarismos})} = \frac{34, \dots}{31} .$$

O logaritmo procurado estará entre

$$\frac{34}{31} \text{ e } \frac{34,99}{31}, \text{ ou seja, entre } 1,09 \text{ e } 1,13.$$

Neste intervalo, encontra-se apenas o logaritmo de um número inteiro, 1, 11, que é o logaritmo de 13. Foi assim que se determinou o resultado que nos deixou perplexos. Claro que para fazer tudo isto mental e rapidamente, é preciso possuir a engenhosidade e destreza de um profissional, mas no essencial, a questão é bastante simples. Qualquer pessoa pode realizar truques semelhantes, senão de memória, pelo menos por escrito.

Suponhamos que nos propõem resolver o seguinte problema: extrair a raiz de índice 64 de um número de 20 algarismos.

Sem procurar saber qual é o número, o leitor pode dar o resultado: a raiz é igual a 2.

De fato,

$$\log \sqrt[64]{(20 \text{ algarismos})} = \frac{19, \dots}{64},$$

e, portanto, deve estar compreendido entre $\frac{19}{64}$ e $\frac{19,99}{64}$, isto é, entre 0,29 e 0,32. Tal logaritmo, para um número inteiro, não pode ser mais do que um: 0,30..., ou seja, o logaritmo do número dois.

O leitor poderá desconcertar completamente quem lhe propôs o problema, dizendo-lhe o número que ele se dispunha a ditar-lhe: o famoso número do “xadrez”:

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Logaritmos no curral

Problema

A chamada ração alimentar de “sobrevivência” (isto é, o alimento mínimo que cobre exclusivamente as calorias que o funcionamento dos órgãos internos consome, que são necessárias para a substituição das células que morrem, etc.) * é proporcional à superfície externa do corpo do animal. Sabido isto, pre-

* Diferente da ração de produção, isto é, alimento destinado à produção de gado.

tende-se determinar a ração alimentar de sobrevivência de um boi que pesa 420 kg. Sabe-se que, nessas condições, um boi que pesa 630 kg necessita de 13 500 calorias.

Solução

Para resolver este problema prático da esfera da pecuária, além de recorrer à álgebra, devemos utilizar a geometria. De acordo com as condições do problema, as calorias procuradas (x) são proporcionais à superfície externa (s) do corpo do animal, isto é,

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{s}{s_1},$$

onde s_1 é a superfície externa do boi que pesa 630 kg. A geometria ensina que as superfícies (s) de corpos semelhantes são proporcionais ao quadrado das suas medidas lineares (l), e os volumes (v , por conseguinte, o peso) são proporcionais ao cubo das medidas lineares. Por isso

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^2}{l_1^2}, \quad \frac{420}{630} = \frac{l^3}{l_1^3},$$

$$\text{ou seja,} \quad \frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}},$$

de onde

$$\begin{aligned} \frac{x}{13\,500} &= \frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \\ &= \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}, \quad x = 13\,500 \sqrt[3]{\frac{4}{9}}. \end{aligned}$$

Usando as tábuas de logaritmos, verificamos que

$$x = 10\,300.$$

O boi necessita de 10 300 calorias.

Logaritmos da música

Os músicos raramente são atraídos pela matemática. Ainda que, na sua maioria, sintam respeito por essa ciência, preferem manter-se afastados dela. No entanto, os músicos, inclusive os que como o Salieri de Pushkin que “menosprezavam a álgebra na harmonia”, têm que ver com a matemática mais freqüentemente do que eles supõem e até com coisas tão terríveis como os logaritmos.

A este propósito, permito-me transcrever um fragmento de um artigo do professor de física russo A. Eikhenvald *.

“O meu companheiro de colégio gostava de tocar piano, mas não gostava de matemática. Inclusive manifestava em tom depreciativo que a música e a matemática não tinham nada de comum: “É certo que Pitágoras descobriu certas correlações entre as vibrações sonoras. Mas não foi precisamente a escala musical de Pitágoras que resultou ser inaplicável na nossa música?”

Imagine-se a desagradável surpresa do meu colega quando lhe demonstrei que quando se

* Foi publicado no *Calendário Astronômico russo de 1919* sob o título: “Acerca das pequenas e grandes distâncias”.

tocam sobre as teclas de um piano moderno, toca-se, falando rigorosamente, sobre logaritmos... Realmente, os chamados “graus” de tonalidade da escala cromática não são equidistantes, nem pelo número de vibrações nem pelos comprimentos das ondas dos sons respectivos, mas representam os *logaritmos* destas grandezas. A base destes logaritmos é 2 e não 10, como acontece em outros casos.

Suponhamos que a nota *dó* da oitava mais baixa — que representamos por zero — é determinada por n vibrações por segundo. Neste caso, o *dó* da primeira oitava produzirá por segundo $2n$ vibrações e o *dó* da m oitava produzirá $n \cdot 2^m$ vibrações, etc. Expressemos as notas da escala cromática do piano pelos números p , tomando o *dó* da oitava mais baixa com nota zero. Assim, a nota *sol* será a nota 7.^a, o *lá* a 9.^a, etc. A nota 12.^a será de novo o *dó*, ainda que de uma oitava mais alta. E como na escala cromática cada nota seguinte tem $\sqrt[12]{2}$ mais vibrações que a anterior, o número destas para qualquer tom pode ser expresso pela fórmula

$$N_{pm} = n \cdot 2^m (\sqrt[12]{2})^p.$$

Aplicando os logaritmos a esta fórmula, obteremos

$$\log N_{pm} = \log n + m \log 2 + p \frac{\log 2}{12},$$

ou

$$\log N_{pm} = \log n + \left(m + \frac{p}{12} \right) \log 2.$$

Tomando o número de vibrações do *dó* mais baixo como unidade ($n = 1$) e passando os logaritmos para o sistema de base 2 (ou simplesmente tomando $\log 2 = 1$, teremos

$$\log N_{pm} = m + \frac{p}{12} .$$

Daqui concluímos que os números de teclas do piano são logaritmos da quantidade de vibrações de cada um dos sons correspondentes *. Podemos inclusive dizer que o número da oitava forma a *característica* e o número do som nessa oitava ** é a *mantissa* deste logaritmo”.

Por exemplo, na nota *sol* da terceira oitava, isto é, no número $3 + \frac{7}{12}$ ($\approx 3,583$), 3 é a característica do logaritmo do número de vibrações deste tom e $\frac{7}{12}$ ($\approx 0,583$), a mantissa do mesmo logaritmo de base 2; por conseguinte, o número de vibrações é $2^{3,583}$, ou seja, 11,98 vezes maior que o número de vibrações do tom *dó* da primeira oitava.

As estrelas, o ruído e os logaritmos

Este título, que trata de coisas à primeira vista tão heterogêneas, não parece ser o mais indicado para uma paródia das obras de

* Multiplicados por 12.

** Dividido por 12.

Kuzmá Prutkov *, mas, na realidade, aborda as estrelas e o ruído em estreita ligação com os logaritmos.

O ruído e as estrelas aparecem aqui juntos porque tanto a intensidade do som como a luminosidade das estrelas se calculam do mesmo modo: mediante a escala logarítmica.

Os astrônomos dividem as estrelas, segundo o grau de luminosidade visível, em estrelas de primeira grandeza, de segunda, de terceira, etc. As grandezas consecutivas das estrelas são representadas como membros de uma progressão aritmética. Mas a luminosidade física varia de acordo com outra lei: a luminosidade objetiva constitui uma progressão geométrica com uma razão igual a 2,5. É fácil compreender que a “grandeza” de uma estrela não é senão o logaritmo da sua luminosidade física. Por exemplo uma estrela de terceira grandeza é $2,5^{3-1}$ (isto é 6,25) vezes mais luminosa que uma estrela de primeira grandeza. Em resumo: ao estabelecer a luminosidade visível de uma estrela, o astrônomo opera com tábuas de logaritmos de base 2,5. Não me detenho em pormenor nestas interessantes correlações, já que noutro dos meus livros, *Astronomia Recreativa*, lhe dedico um número suficiente de páginas.

Da mesma forma se calcula a intensidade do som. A influência nociva dos ruídos industriais na saúde do trabalhador e na sua

* *Kuzmá Prutkov* é o nome de um imaginário autor de engenhosos aforismos. É o pseudônimo de dois escritores russos irmãos, Jemtchújnikov e A. Tolstoi.

produtividade conduziu à elaboração de um método para medir com exatidão a intensidade do ruído. A unidade dessa intensidade é o *bel* (na prática, emprega-se o decibel, décima parte do bel). Os seguintes escalões de sonoridade: 1 bel, 2 bels, etc. (na prática, 10 decibels, 20 decibels, etc.), constituem para o nosso ouvido uma progressão aritmética. A “força” física destes sons (mais exatamente, a energia) constitui uma progressão geométrica cuja razão é 10. A diferença de intensidade de um bel corresponde a relação de força de som igual a 10. Portanto, a intensidade do som expressa em bels é igual ao logaritmo decimal da sua intensidade física.

Isto será mais evidente se examinarmos alguns exemplos.

O brando farfalho das folhas considera-se como tendo a intensidade de 1 bel; a conversa em voz alta, 6,5 bels; o rugido do leão, 8,7 bels. Daqui se deduz que a força do som de uma conversa supera o sussurro das folhas em $10^{6,5-1} = 10^{5,5} = 316\ 000$ vezes.

O rugido do leão é superior à conversa em voz alta em

$$10^{8,7-6,5} = 10^{2,2} = 158 \text{ vezes.}$$

O rugido cuja intensidade é superior a 8 bels considera-se prejudicial ao organismo humano. Esta norma é superior em muitas fábricas onde se produzem ruídos de 10 bels e mais; as marteladas em chapas de aço produzem um ruído de 11 bels. Estes ruídos são

100 e 1000 vezes mais fortes que a norma permitida e 10 e 100 vezes mais intensos que os ruídos mais estrepitosos das cataratas do Niágara (9 bels).

Será por acaso que, ao calcular a luminosidade visível das estrelas e ao medir a intensidade do som, nos referimos à dependência logarítmica existente entre a grandeza da sensação e da irritação que as provocam?

Não. Tanto uma como a outra são efeitos de uma mesma lei (chamada “lei psicofísica de Fechner”) que se enuncia assim: a grandeza da sensação é proporcional ao logaritmo da intensidade da irritação.

Verificamos, assim, que os logaritmos invadem o campo da psicologia.

Os logaritmos e a luz elétrica

Problema

A razão de as lâmpadas de gás (frequentemente as designamos erradamente por lâmpadas de “meio watt”) iluminarem mais que as de vácuo, ainda que tenham o filamento metálico do mesmo material, consiste na diferente temperatura do filamento. Segundo uma lei da física, a quantidade total de luz projetada com incandescência branca aumenta proporcionalmente à potência de expoente $\frac{1}{2}$ da temperatura absoluta. Portanto, façamos o seguinte cálculo: determinar quantas vezes uma lâmpada de “meio watt” cuja tem-

peratura do filamento é de $2\,500^\circ$ (a partir de 273°C) produz mais luz que outra de vácuo, cujo filamento atinge $2\,200^\circ$ de temperatura.

Solução

Representado por x a razão procurada, temos a seguinte equação

$$x = \left(\frac{2500}{2200} \right)^{12} = \left(\frac{25}{22} \right)^{12},$$

de onde

$$\log x = 12 (\log 25 - \log 22); \quad x = 4,6.$$

A lâmpada de gás emite 4,6 vezes mais luz que a de vácuo. Daqui concluímos que se esta última é equivalente a 50 velas, a primeira, nas mesmas condições, produz 230 velas.

Façamos outro cálculo. Qual será a elevação de temperatura absoluta (em percentagem) necessária para duplicar a luminosidade da lâmpada?

Solução

A equação que resolve o problema é

$$\left(1 + \frac{x}{100} \right)^{12} = 2,$$

de onde

$$\log \left(1 + \frac{x}{100} \right) = \frac{\log 2}{12} \quad \text{e} \quad x = 6\%.$$

Vejamos agora em que proporção (em percentagem) aumentará a luminosidade de uma lâmpada se a temperatura absoluta de seu filamento se elevar em 1%.

Solução

Se resolvermos a equação por meio de logaritmos, teremos

$$x = 1,01^{12},$$

e assim

$$x = 1,13.$$

A luminosidade cresce 13%.

Calculando a elevação da temperatura em 2% veremos que o aumento de luminosidade é de 27%, e com uma elevação de 3% na temperatura, a luminosidade aumentará em 43%.

Isto explica por que motivo a indústria de lâmpadas elétricas se preocupa tanto com a elevação da temperatura do filamento, sendo de grande valor cada grau que se consiga aumentar.

Legados a longo prazo

Quem não ouviu falar do conhecido número de grãos de trigo que, segundo a lenda, o inventor de xadrez pediu como recompensa? Este número se obtém duplicando sucessivamente cada um dos números obtidos. Para a primeira casa do tabuleiro de xadrez, o inventor pediu um grão; para o segundo, dois, etc. A cada uma das casas corresponde o dobro do que à anterior, até a casa 64.

Mas um crescimento tão vertiginoso se dá, não só duplicando sem cessar o número anterior, mas também com uma norma de crescimento mais moderada. Um capital que

produz 5% anuais de juro aumenta cada ano 1,05 vezes. Parece um crescimento pouco considerável, mas no fim de certo tempo o capital alcança grandes proporções. Isto explica que, decorridos muitos anos depois de ser legada, uma herança cresça extraordinariamente. Parece estranho que uma quantia bastante modesta deixada de herança se converta num capital enorme. É muito conhecido o testamento de Franklin, famoso estadista norte-americano. Foi publicado na *Recompilação de Diversas Obras de Benjamin Franklin*. Eis um fragmento dele:

“Lego mil libras aos habitantes de Boston. Se as aceitarem, estas mil libras devem ser administradas pelos mais distintos cidadãos da cidade que as emprestarão com 5% de juro a artesãos jovens *. Ao fim de cem anos esta importância crescerá para 131 000 libras esterlinas. Então desejo que 100 000 libras sejam aplicadas na construção de edifícios públicos e as restantes 31 000 sejam emprestadas por um prazo de 100 anos. A essa altura a quantia terá chegado a 4 060 000 libras esterlinas, das quais 1 060 000 ficarão à disposição dos cidadãos de Boston e 3 000 000, ao município de Massachusettes. E não me atrevo a prosseguir deixando mais disposições”.

Franklin, que deixou uma herança de 1000 libras, distribuiu milhões delas. E não se trata de nenhum mal-entendido. O cálculo matemático confirma que as disposições do

* Nesta época não havia na América do Norte instituições de crédito.

testador estão certas. As 1000 libras aumentaram em cada ano 1,05 vezes e, ao fim de 100 anos, converteram-se em

$$x = 1000 \cdot 1,05^{100} \text{ libras.}$$

O valor desta expressão pode ser calculado mediante o uso de logaritmos,

$$\log x = \log 1000 + 100 \log 1,05 = 5,11893,$$

de onde

$$x = 131\ 000,$$

de acordo com o testamento. No segundo século, as 31 000 chegariam a

$$y = 31\ 000 \cdot 1,05^{100},$$

de onde, aplicando logaritmos, encontramos

$$y = 4\ 076\ 500,$$

importância que difere muito pouco da indicada no testamento.

Deixamos o próprio leitor resolver o problema seguinte, que aparece na obra *Os Senhores Golovlev*, de Saltykov-Stchedrin:

“Porfíri Vladímirovitch está no seu gabinete escrevendo folhas e folhas de papel. Procura saber que importância teria se os cem rublos com que seu avô o presenteou quando nasceu, em vez de terem sido gastos por sua mãe, tivessem sido depositados numa caixa econômica. Porém o resultado não é muito elevado: apenas oitocentos rublos!”

Supondo que Porfíri tivesse na época 50 anos e admitindo que houvesse feito bem o cálculo (o que é pouco provável, pois, sem

dúvida alguma, desconhecia os logaritmos e por isso não podia resolver problemas de juros compostos), calcular qual era o juro que, naquele tempo, davam as caixas econômicas.

Juros contínuos

Nas caixas econômicas, o juro do capital soma-se anualmente ao depósito. Se a adição se fizer com maior frequência, o capital cresce mais rapidamente, porque forma com o juro uma importância maior. Consideremos um exemplo simples e puramente teórico. Admitamos que se depositam 100 rublos numa caixa econômica a juro de 100% ao ano. Se juntarmos o juro ao capital ao fim de um ano, teremos 200 rublos. Vejamos agora o que acontece se os juros se forem juntando ao capital inicial de meio em meio ano. Ao finalizar o primeiro semestre chegará a

$$100 \text{ rublos} \cdot 1,5 = 150 \text{ rublos.}$$

No fim do segundo semestre

$$150 \text{ rublos} \cdot 1,5 = 225 \text{ rublos.}$$

Se a adição se realizar em cada $\frac{1}{3}$ de ano, teremos ao fim de um ano

$$100 \text{ rublos} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 237,03 \text{ rublos.}$$

Reduzindo o prazo de adição do juro ao capital depositado para a décima parte do ano, para a centésima parte do ano, para a milésima parte do ano, etc., veremos que os 100 rublos, ao fim de um ano, se transforma-

rão em

$$100 \text{ rublos} \cdot 1,1^{10} \approx 259,37 \text{ rublos}$$

$$100 \text{ rublos} \cdot 1,01^{100} \approx 270,48 \text{ rublos}$$

$$100 \text{ rublos} \cdot 1,001^{1000} \approx 271,69 \text{ rublos.}$$

A matemática superior demonstra que, reduzindo infinitamente o prazo de adição do juro ao depósito, este não cresce infinitamente, mas se aproxima de um certo limite, que é mais ou menos * 271,83 rublos.

Um capital depositado ao juro de 100% não pode aumentar num ano mais do que 2,7183 vezes, ainda que se adicionar o juro ao capital cada segundo.

O número “e”

O 2,718... obtido, número que desempenha na matemática superior um papel enorme (talvez tão grande como o famoso número π), tem designação especial: e . É um número irracional, visto que não pode ser expresso por um número finito de algarismos **, mas que só se calcula com a aproximação desejada mediante a seguinte série:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \\ + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \dots$$

* Com uma aproximação de centésimos.

** Além disso, é, como o número π , transcendente, isto é, não pode ser obtido como resultado da solução de nenhuma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Pelo exemplo exposto sobre capitalização pode-se ver que o número e é o limite da expressão

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

para um crescimento ilimitado de n .

Por muitas razões, que não podemos explicar aqui, é de extrema conveniência tomar o número e como base do sistema de logaritmos. Tais tábuas (de “logaritmos naturais”) existem e são aplicadas em grande escala na ciência e na técnica. Aqueles logaritmos gigantes de 48, 61, 102 e 260 decimais a que nos referimos anteriormente têm precisamente a base e . Frequentemente o número e aparece onde menos se espera. Suponhamos, por exemplo, o seguinte problema:

Em quantas partes se deve dividir o número a para que o produto de todas elas seja o maior possível?

Já sabemos que, sendo a soma dos fatores invariável, o seu produto será maior quando os fatores forem iguais entre si. Mas em quantas partes iguais devemos dividir a ? Em duas, em três, em dez? A matemática superior ensina que se obtém o maior produto possível, quando os fatores tomam valores o mais perto possível do número e .

Por exemplo, 10 deve ser dividido num número de partes iguais tais que cada uma delas esteja o mais próximo possível de 2,718... Para isso temos que encontrar o quociente

$$\frac{10}{2,718 \dots} = 3,678 \dots$$

Mas como não é possível dividir em 3,678... partes iguais, temos que o fazer no número inteiro mais próximo, que é 4, e obteremos o maior produto possível de partes de 10, se estas foram iguais a $\frac{10}{4}$, isto é, 2,5. Isto significa que

$$(2,5)^4 = 39,0625$$

é o maior produto que pode ser obtido multiplicando partes iguais do número 10. De fato, dividindo 10 em 3 ou em 5 partes iguais, os produtos são menores:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37,$$

$$\left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32.$$

Para conseguir o maior produto das partes iguais do número 20, este deve ser dividido em 7 partes iguais, visto que

$$20 : 2,718... = 7,36 \approx 7.$$

Para obter o maior produto das partes iguais do número 50, este deve ser dividido em 18 partes, e 100 em 37, visto que

$$50 : 2,718. . . = 18,4,$$

$$100 : 2,718. . . = 36,8.$$

O número *e* desempenha um enorme papel na matemática, na física, na astronomia e em outras ciências. Vejamos algumas das questões para cuja análise matemática temos que nos valer desde número (o número de tais questões é ilimitado):

a fórmula barométrica (diminuição da
 pressão com a altitude),
 a fórmula de Euler,
 a lei do arrefecimento dos corpos,
 a desintegração radioativa e a idade da
 Terra,
 as oscilações do pêndulo no ar,
 a fórmula de Tsiolkóvski para a veloci-
 dade do foguete,
 os fenômenos oscilatórios num circuito
 radiofônico,
 o crescimento das células.

Comédia logarítmica

Problema

Como complemento das comédias matemáticas que o leitor teve ocasião de conhecer no capítulo V, apresentamos mais um caso do mesmo gênero. A “demonstração” da desigualdade $2 > 3$. Desta vez intervêm os logaritmos.

A “comédia” começa com a desigualdade

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8},$$

que é evidentemente verdadeira. Depois seguem-se as transformações

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

que tão pouco inspiram desconfiança. A um número maior corresponde um logaritmo maior.

Logo,

$$2 \log_{10} \left(\frac{1}{2} \right) > 3 \log_{10} \left(\frac{1}{2} \right).$$

Depois de dividir ambos os membros da desigualdade por $\log_{10} \left(\frac{1}{2} \right)$, teremos $2 > 3$. Onde está o erro desta demonstração?

Solução

O erro consiste em que, ao simplificar por $\log_{10} \left(\frac{1}{2} \right)$, o sinal $>$ não foi substituído por $<$, e era necessário fazê-lo, visto que $\log_{10} \left(\frac{1}{2} \right)$ é um número negativo. [Se não se aplicassem os logaritmos de base 10, mas outros, de base menor que $\left(\frac{1}{2} \right)$, o logaritmo de $\left(\frac{1}{2} \right)$ nessa base seria positivo, mas não se poderia afirmar que a um número maior corresponderia um logaritmo também maior].

Expressar qualquer número só com três “2”

Problema

Terminamos o livro com um engenhoso quebra-cabeça algébrico que distraiu os delegados de um congresso de física realizado em Odessa. Propomos o seguinte problema: expressar qualquer número, inteiro e positivo, usando três 2 e sinais matemáticos.

Solução

Mostremos com um exemplo a solução deste problema. Suponhamos que o número dado é o 3. Neste caso o problema se resolve assim:

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

É fácil verificarmos a veracidade desta igualdade.

De fato

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}},$$

$$\log_2 2^{2^{-3}} = 2^{-3}, \quad -\log_2 2^{-3} = 3.$$

Se o número dado fosse 5, resolveríamos o problema do mesmo modo:

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

Deve-se ter presente que, tratando-se de raízes quadradas, se omite o índice da mesma.

A solução geral do problema é então a seguinte: Se o número dado é N , teremos

$$N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{2}}}}}_{N \text{ vezes}}.$$

Assim, o número de radicais é igual ao número de unidades do número dado.

A CIÊNCIA AO ALCANCE DE TODOS

Este livro foi escrito pelo famoso cientista soviético e divulgador dos conhecimentos científicos, Y.I. Perelman. A fim de o tornar atraente, o autor utiliza exercícios com temas extraordinários, alusivos à história da Matemática, revela aplicações inesperadas da Álgebra na vida quotidiana e dá a conhecer curiosos quebra-cabeças.

O leitor conhecerá a quinta, a sexta e a sétima operações matemáticas, as equações de Diofanto e as propriedades interessantes das progressões.



ISBN 5-03-000328-2.